자료 출처 : 기하학원론 가, 라 권
유클리드 씀, 이무현 옮김

기하학개론

김준희

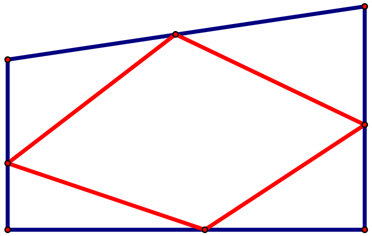
INDEX 목차

7 강 4권 정다각형과 원

법칙1~법칙16

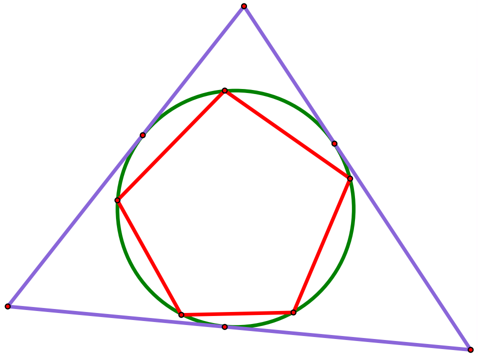
뜻매김

1. 한 다각형의 각각의 각들이 다른 다각형의 각각의 변들에 놓여 있으면,
그 다각형은 다른 다각형에 내접하고 있다.



2. 한 다각형의 각각의 변들이 다른 다각형의 각각의 각들을 지나면,
그 다각형은 다른 다각형에 외접하고 있다.

3. 한 다각형의 각각의 각들이 원둘레에 놓여 있으면,
그 다각형은 원에 내접하고 있다.



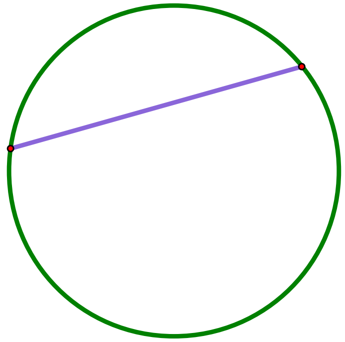
4. 한 다각형의 각각의 변들이 원둘레와 접하고 있으면,
그 다각형은 원에 외접하고 있다.

뜻매김

5. 어떤 원의 둘레가 어떤 다각형의 각각의 변들과 접하고 있으면,
   그 원은 그 다각형에 내접하고 있다.

6. 어떤 원의 둘레가 어떤 다각형의 각각의 각들을 지나면,
   그 원은 그 다각형에 외접하고 있다.

7. 직선의 양 끝점이 원둘레에 놓여 있으면,
   그 직선은 원에 걸쳐 있다.

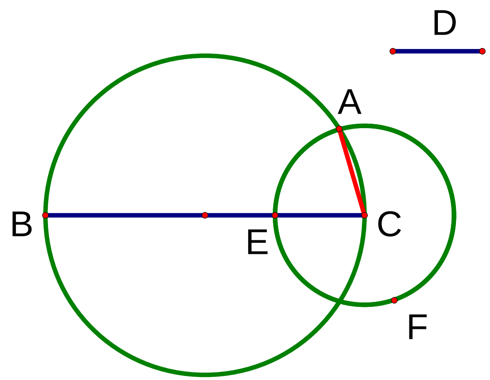


법칙 1

어떤 원과, 그 원의 지름보다 짧은 직선을 주었다고 하자. 그 원에다 주어진 직선과 같은 길이인 직선을 걸쳐 놓아라.

보임

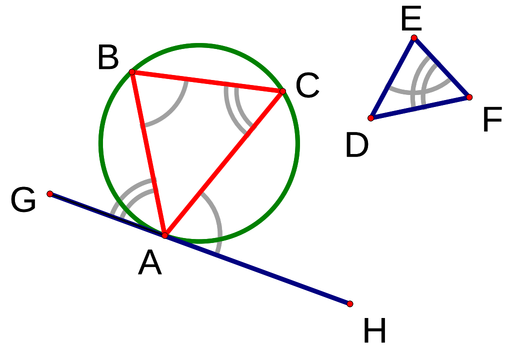
1. 원 ABC의 지름보다 짧은 직선 D가 있다고 하자.
2. 원 ABC의 지름 BC를 그리자.
   그러면 BC > D 이다. (교재 내용 참고)
3. CE = D가 되도록 직선 BC에서 E를 잡자.
4. C를 중점, CE를 반지름으로 하는 원 EAF를 그리고 직선 CA를 그리자.
5. C는 원 EAF의 중점이므로 CA = CE 이다.
6. 따라서 CA = D 이다.
7. 그러므로 주어진 원 ABC에 직선 D와 길이가 같은 직선 CA를 걸쳐 놓았다.



법칙 2

어떤 삼각형과 원을 주었다고 하자. 그 삼각형과 각들의 크기가 같은 삼각형(닮은꼴 삼각형)을 주어진 원에 내접하도록 만드시오.

보임



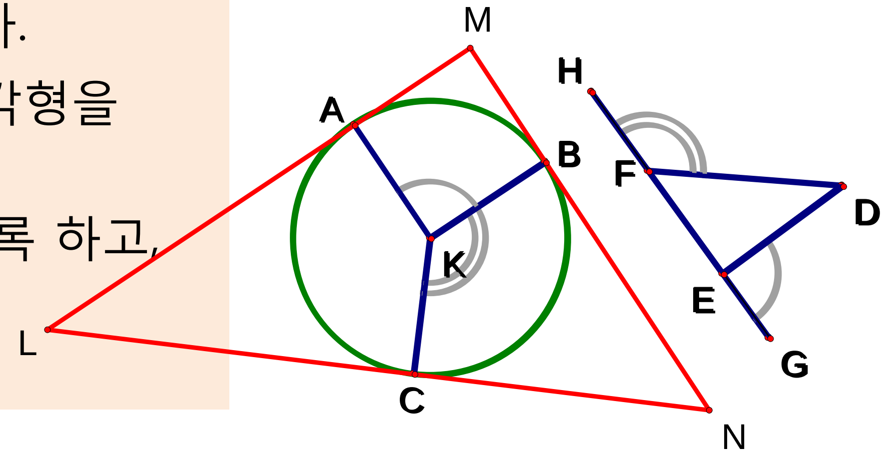
1. 원 ABC와 삼각형 DEF를 주었다고 하자.
2. 삼각형 DEF와 각들의 크기가 같은 삼각형을 원 ABC에 내접하도록 만들어야 한다.
3. 직선 GH가 점 A에서 원에 접하도록 그리자 (3권 법칙16, 딸린 법칙).
4. 점 A에서 ∠DEF = ∠HAC가 되도록 그림과 같이 그리자(1권 법칙23).
5. 점 A에서 ∠DFE = ∠GAB가 되도록 그림과 같이 그리자(1권 법칙23)
6. 직선 BC를 그리자.
7. 그러면 ∠HAC = ∠ABC, ∠GAB = ∠ACB 이다.
8. 따라서 ∠ABC = ∠DEF, ∠ACB = ∠DFE, ∠BAC = ∠EDF이다.
9. 그러므로 주어진 삼각형과 닮은꼴 삼각형을 원에 내접시켰다.

법칙 3

어떤 삼각형과 원을 주었다고 하자. 그 삼각형과 각들의 크기가 같은 삼각형(닮은꼴 삼각형)을 주어진 원에 외접하도록 만드시오.

보임

1. 원 ABC와 삼각형 DEF를 주었다고 하자.
2. 삼각형 DEF와 각들의 크기가 같은 삼각형을 원 ABC에 외접하도록 만들어야 한다.
3. 직선 EF를 길게 늘여서 H, G에 이르도록 하고, 원 ABC의 중점 K를 잡자.
4. 직선 KB를 임의의 방향으로 그리자.



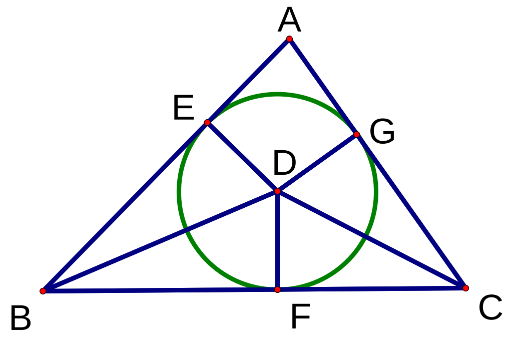
5. ∠DEG = ∠BKA가 되도록 점 A를 잡고, ∠DFH = ∠BKC가 되도록 점 C를 잡자.
6. 점 A, B, C에서 원에 접하는 직선 LAM, MBN, NCL을 그리자.
7. 그러면 ∠LMN = ∠FED, ∠LNM = ∠DFE, ∠MLN = ∠FDE 이다.(왜?)
8. 그러므로 주어진 삼각형과 닮은꼴 삼각형을 원에 외접시켰다.

법칙 4

어떤 삼각형을 주었을 때, 그 안에 원을 내접시키시오.

보임

1. 삼각형 ABC를 주었다고 하자.
2. ∠ABC, ∠ACB를 각각 이등분하는 직선 BD, CD를 그리고(1권 법칙9), 그들의 교점을 D로 나타내자.
3. D에서 직선 AB, BC, CA에 수직인 직선 DE, DF, DG를 그리자.



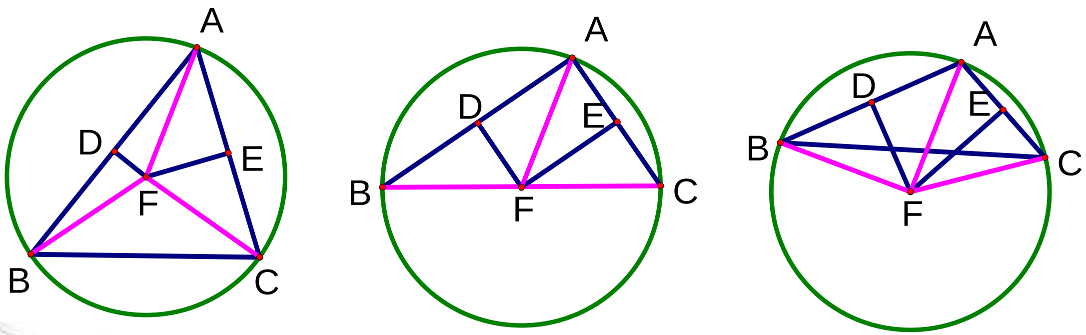
4. ∠ABD = ∠CBD, ∠BED = ∠BFD, BD는 공통이므로, 삼각형 EBD, FBD는 서로 같다(1권 법칙26). 따라서 DE = DF이다.
5. 마찬가지로 DG= DF이므로, DE = DF = DG 이다.
6. D를 중점으로, DE를 반지름으로 하는 원을 그리자.
7. 점 E, F, G의 각들이 직각이기 때문에, 이 원은 직선 AB, BC, CA에 접한다.
8. 그러므로 삼각형 안에 원을 내접시켰다.

법칙 5

어떤 삼각형을 주었을 때, 그 삼각형에 원을 외접시키시오.

보임

1. 삼각형 ABC에서 AB의 이등분점을 D, AC의 이등분점을 E로 잡자.
2. D에서 AB에 수직인 되도록, E에서 AC에 수직이 되도록
   각각 직선 DF, EF를 그리자.
3. 그러면 다음처럼 세 가지 경우가 있다.
   각각의 경우 비슷한 방법으로 AF = BF = CF 임을 보일 수 있다.

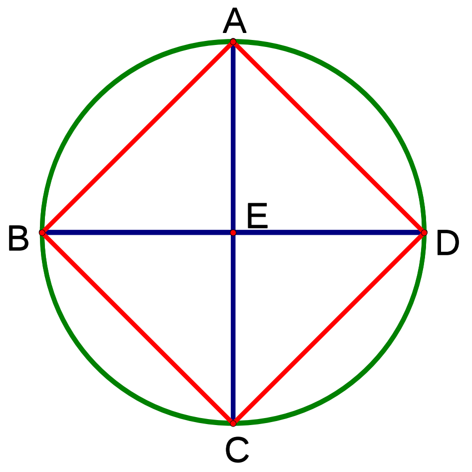


법칙 6

어떤 원을 주었을 때, 그 안에 정사각형을 내접시키시오.

보임

1. 주어진 원 안에 정사각형 ABCD를 내접시키고자 한다.
2. 지름 AC와 BD가 서로 직각이 되도록 그리자.
3. 직선 AB, BC, CD, DA를 그리자.
4. E가 중점이므로 BE = ED, EA는 공통이며 수직이므로, AB = AD이다(1권 법칙4).
5. 마찬가지로 AB = BC, AD = CD임을 보일 수 있다.
6. 그러므로 사각형 ABCD의 변들은 모두 길이가 같다.
7. 또한 AC, BD는 모두 지름이므로 사각형 ABCD의 네 각 모두 직각이다(3권 법칙31).
8. 그러므로 이 사각형은 정사각형이고 원에 내접하고 있다.

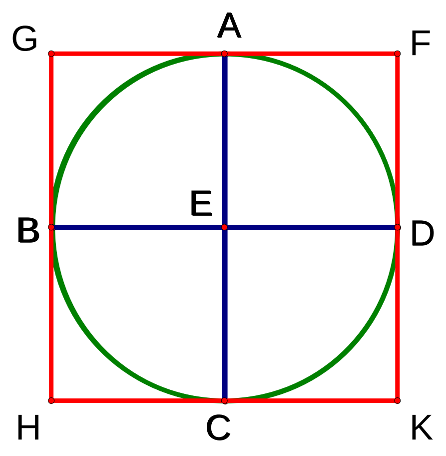


법칙 7

어떤 원을 주었을 때, 그 원에 정사각형을 외접시키시오.

보임

1. 주어진 원의 지름 AC, BD가 서로 직각이 되도록 그리자.
2. 점 A, B, C, D에서 원에 접하도록 직선 FG, GH, HK, KF를 그리자(3권 법칙16, 딸린 법칙).
3. FG는 원에 접하고, EA는 중점 E와 접점을 잇는 직선이므로 ∠A는 직각이다(3권 법칙18).
4. 마찬가지 이유로 ∠B, ∠C, ∠D 모두 직각이다.
5. ∠AEB = ∠EBG = 직각 이므로, GH, AC는 평행하다(1권 법칙28). 또한 AC, FK 역시 평행하다.
6. 마찬가지 이유로 GF, HK, BD도 평행하다.
7. 평행사변형의 성질(1권 법칙34)에 의하여 GH = FK = AC, GF = HK = BD이다.
8. AC = BD 이므로 평행사변형 GHKF의 네 변은 모두 같다. 따라서 정사각형이다.

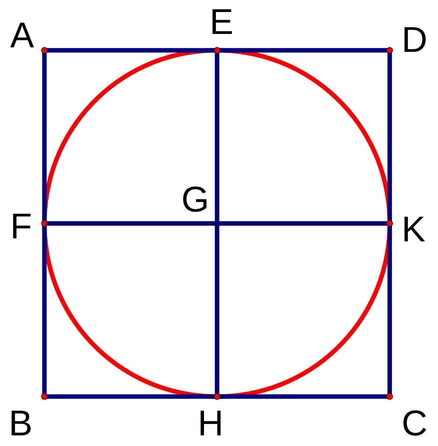


법칙 8

정사각형을 주었을 때, 그 안에 원을 내접시키시오.

보임

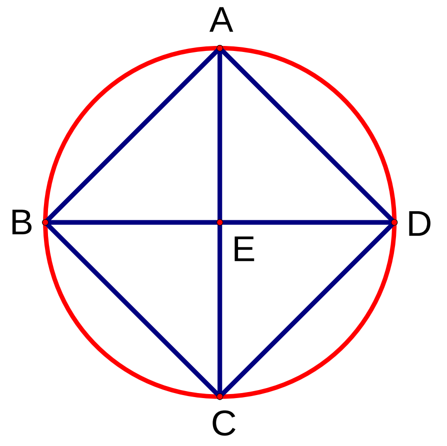
1. 정사각형 ABCD안에 원을 내접하도록 그리자.
2. AD, AB의 이등분점을 각각 E, F라 하자.
3. 점 E에서 직선 AB에 평행한 직선 EH,
   점 F에서 직선 AD에 평행한 직선 FK를 그리자.
4. 두 직선 EH, FK의 교점을 G라 하자.
5. 그러면 평행사변형의 성질(1권 법칙34)에 의해
   AF = GE, FG = AE이다.
6. 또한 AE = AF 이므로(이등분점) FG = GE이다
7. 비슷하게 GE, GF, GH, GK 모두 길이가 같음을 보일 수 있다.
8. 그러므로 G를 중점으로, GE를 반지름으로 하는 원을 그리면
   정사각형 ABCD에 내접하는 원이 된다.



법칙 9

정사각형을 주었을 때, 거기에 원을 외접시키시오.

보임

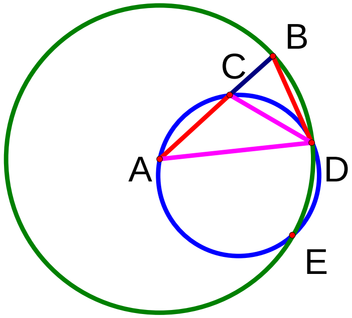


1. 정사각형 ABCD에서 직선 AC, BD를 그리고, 이들의 교점을 E라 하자.
2. DA = AB, AC는 공통, DC = BC이므로 ∠DAC = ∠BAC이다(1권 법칙8).
3. 따라서 AC는 ∠DAB를 이등분한다.
4. 마찬가지로 BD는 ∠ABC, CA는 ∠BCD, DB는 ∠CDA를 이등분한다.
5. ∠DAB = ∠ABC이므로, ∠EAB = ∠EBA이다. 따라서 EA = EB이다.
6. 마찬가지로 EA = EB = EC = ED임을 보일 수 있다.
7. 그러므로 E를 중점으로, 직선 EA를 반지름으로 하는 원을 그리면 정사각형 ABCD에 외접하는 원이 된다.

법칙 10

두 밑각의 크기가 나머지 한 각 크기의 두 배가 되는 이등변삼각형을 그리시오. (36도 작도가능을 의미)

보임



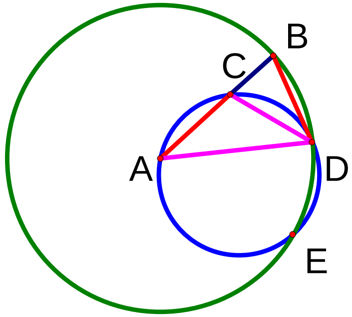
1. 임의의 직선 AB를 그은 다음 적당한 점 C를 잡아서 AB, BC로 만든 직사각형이 AC로 만든 정사각형과 넓이가 같게 하자(2권 법칙11).
2. A를 중점으로 AB를 반지름으로 하는 원 BDE를 그리자.
3. 원 BDE에 AC와 길이가 같도록 BD를 걸쳐놓자.
4. 직선 AD, DC를 그리자.
5. 삼각형 ACD에 외접하도록 원 ACD를 그리자.
6. AB, BC로 만든 직사각형 넓이 = AC로 만든 정사각형 넓이 이고, AC=BD이므로 AB, BC로 만든 직사각형 넓이 = BD로 만든 정사각형 넓이 이다.
7. 따라서 BD는 원 ACD에 접한다(3권 법칙37).
8. 그리고 ∠BDC = ∠DAC(3권 법칙32)이다. 양쪽에 ∠CDA를 더하면 ∠BDA = ∠CDA + ∠DAC = ∠BCD이 된다. 그러므로 ∠BDA = ∠BCD이다.

법칙 10

두 밑각의 크기가 나머지 한 각 크기의 두 배가 되는 이등변삼각형을 그리시오. (36도 작도가능을 의미)

보임

9. 그런데 ∠BDA = ∠CBD 이다(AD = BD).
10. 따라서 ∠DBA = ∠BCD 이다.
11. 그러므로 ∠BDA = ∠DBA = ∠BCD 이다.
12. 11에 의해 BD = DC이므로 CA = CD이다.
13. 따라서 ∠CDA = ∠DAC 이다.
14. 그러므로 ∠CDA + ∠DAC = 2 ∠DAC이고
    ∠BCD = ∠CDA + ∠DAC이므로 ∠BCD = 2 ∠CAD이다.
15. 또한 11에 의해 ∠BDA = ∠DBA = 2 ∠DAB
16. 그러므로 이등변 삼각형 ABD는 주어진 조건을 만족하는 삼각형이다.



법칙 11~16

과제물입니다.