

# 4장 행렬의 기본개념

# 제1절 행렬의 정의

## 1. 정의

행렬이란 수 또는 변수 등의 일련의 개체들을 행(Row)과 열(Column)에 맞추어 직사각형 모양으로 순서 있게 배열하여 괄호[ ]로 묶은 것.

## 2. 용어

- 원소, 성분  
괄호안의 개체와 같이 행렬을 구성하는 요소 보통 소문자로  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  등으로 나타냄( $i$ 행  $j$ 열의 원소)
- 행(Row): 행렬의 가로 줄
- 열(Column): 행렬의 세로 줄

$$A = \begin{matrix} & & & & \text{열} \\ \text{행} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} & & & \end{matrix}$$

### 3. 행렬의 차원(dimension)

- 행렬의 크기를 말함.
- 행렬의 크기는 (행의 개수) $\times$ (열의 개수)로 나타냄. 만약 행의 개수가  $m$ 이고 열의 개수가  $n$ 이면  $m \times n$ (차원)행렬이라고 함.
- $n$ 차 정방행렬  
행과 열의 수가 같으면 정방행렬이라 하며  $m=n$ 이면  $n$ 차 정방행렬
- 행벡터  
행렬의 특수한 형태로 오직 한 개의 행만을 가지는 행렬
- 열벡터: 한 개의 열만을 가지는 행렬
- $1 \times n$  행렬은  $n$ 차 행벡터  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{bmatrix}$

$m \times 1$  행렬은  $m$ 차 열벡터

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

## 제2절 행렬의 연산

### 1. 행렬의 상등

- 두 행렬 A와 B의 행의 개수와 열의 개수가 각각 같을 때 이 두 행렬은 “같은 꼴”
- 같은 꼴의 두 행렬 A와 B의 대응하는 원소가 서로 같을 때 행렬 A와 B는 “서로 같다”(=상등)  $A=B$
- 즉,  $m \times n$ 행렬 A와 B가 같기 위해서는 모든 행(i)와 열(j)에 대해 A의 (i,j)원소인  $a_{ij}$ 가 B의 (i,j)원소인  $b_{ij}$ 와 같아야 A와 B는 상등이다.

### 2. 행렬의 연산

#### 1) 행렬의 덧셈과 뺄셈

- 행렬의 덧셈과 뺄셈은 각 행렬이 “같은 꼴”일 때만 정의된다.
- 예를 들어 두행렬 A와 B에 대하여 A의 차원과 B의 차원이 같으면 각 행렬의 같은 위치에 있는 원소들을 서로 더하거나 뺄 수 있다. 두 행렬 A와 B에 대하여

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \quad A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

- 행렬의 덧셈의 교환법칙과 결합법칙이 성립한다.
  - ✓  $A+B=B+A$
  - ✓  $(A+B)+C=A+(B+C)$
- 영행렬(Zero matrix) : 행렬의 모든 원소가 0으로 이루어진 행렬
- 영행렬과 같은 꼴의 행렬에 대하여 다음이 성립.
  - ✓  $0+A=A+0=A$
  - ✓  $(-A)+A=A+(-A)=0$

## 2) 스칼라 곱

- 스칼라(scalar): 수 또는 변수를 행렬과 구분하기 위하여 부르는 명칭 일반적으로 상수를 의미함. 예를 들어 스칼라  $k$ 와 행렬  $A$ 의 곱을 스칼라 곱(배)이라고 하며 아래와 같이 나타냄

$$kA = Ak = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

- 행렬  $A$ 와  $B$ 가 같은 꼴이며 스칼라  $s$ 와  $t$ 에 대하여 다음 정리가 성립함.
  - ✓  $(st)A = s(tA)$
  - ✓  $(s+t)A = sA + tA$
  - ✓  $s(A+B) = sA + sB$

(예제 3.2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

a)  $A + X = B$ 를 만족시키는 행렬  $X$ 를 구하라

b)  $Y + B = A$ 를 만족시키는 행렬  $Y$ 를 구하라.

(예 3.3)

$$A = \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 15 \end{bmatrix}$$

a)  $A + 2B = X$ 를 만족시키는 행렬  $X$ 를 구하라

b)  $B - 2A = X$ 를 만족시키는 행렬  $Y$ 를 구하라.

(예 3.4)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{일 때 행렬} \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

를 실 수  $x$ 와  $y$ 를 이용하여 두 행렬의 가중합인  $xA + yB$ 의 형태로 나타내라.

### 3) 행렬의 곱셈

- 두 행렬 ( $m \times k$ )행렬 A와 ( $k \times n$ )행렬 B에 대하여 A행렬의 열의 수와 B행렬의 행의 수가 같을 때 행렬의 곱셈 AB가 정의 될 수 있다. A행렬과 행렬의 곱은 ( $m \times n$ )행렬이 된다.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

이면

$$AB = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^k a_{1i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^k a_{1i}b_{in} \\ \sum_{i=1}^k a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^k a_{2i}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^k a_{2i}b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^k a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^k a_{mi}b_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^k a_{mi}b_{in} \end{pmatrix}$$

## ➤ 행렬의 곱셈 정리

- 교환법칙: 일반적으로 성립하지 않음( $AB \neq BA$ )
  - 단위행렬과의 교환법칙 성립( $AI=IA$  A:행렬 I:단위행렬)
  - 스칼라 곱의 교환법칙 성립( $kA=Ak$  k:스칼라)
- 결합법칙: 성립
- 분배법칙 성립
- 행렬 A가 정방행렬이고 항등행렬의 곱일 때는  $A \times A \times \cdots \times A = A^n$  성립
- 합과 곱이 정의되는 행렬 A, B, C에 대하여
  - $(kA)B = A(kB) = k(AB)$  (여기서 k는 스칼라)
  - $(AB)C = A(BC)$
  - $(A+B)C = AC + BC$
  - $A(B+C) = AB + AC$

- 행벡터와 열벡터의 곱은 스칼라(=내적)
- 열벡터와 행벡터의 곱은 행렬(=외적)
- 행렬과 열벡터의 곱은 열벡터
- 행벡터와 행렬의 곱은 행벡터

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \text{에 대하여}$$

$$AB = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} j & k & l \\ m & n & o \\ p & q & r \end{bmatrix} \text{에 대하여}$$

$$CD = \begin{bmatrix} aj + bm + cp & ak + bn + cq & al + bo + cr \\ dj + em + fp & dk + en + fq & dl + eo + fr \\ gj + hm + ip & gk + hn + iq & gl + ho + ir \end{bmatrix}$$

다음 행렬의 곱을 계산하라.

$$a) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & -20 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a & -a^2 \\ b & -b^2 \\ -b & -c^2 \end{bmatrix}$$

다음 연립방정식을  $AX = B$ 의 형태로 나타내라. 단,  $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 로 정의한다.

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 15$$

$$x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20$$

$$5x_1 + x_2 - 10x_3 = 5$$

- (예제 3.10)갑 도너츠 회사는 A형과 B형의 두 가지 유형의 도너츠를 판매. 1 세트당 A형의 가격은 10,000원, B형의 가격은 12,000원이다. 지난달 A형 도너츠의 매출량은 15,000세트, B형은 27,000세트였다. 도너츠 생산에 투입되는 식자재는 밀가루 11,000kg, 버터 15,000kg, 설탕 15,000kg이었다. 각 식자재의 구입가는 kg당 각각밀가루 10,000원, 버터 10,000원, 설탕 8,000원이라고 가정하고 갑 회사의 순이익을 행렬을 이용하여 구하라.

(풀이)

- 매출액-비용=순이익
- 매출액=(A형 세트당 가격×A형매출량)+(B형 세트당 가격×B형매출량)  
스칼라로 표현되어야 하기 때문에 [행벡터 × 열벡터]의 형식으로 행렬이 표현되어야 함. 행렬의 차원 (1×2)(2×1)=(1×1)

$$\text{매출액} \quad \begin{bmatrix} 10000 & 12000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 15000 \\ 27000 \end{bmatrix} = [(10000 \times 15000) + (12000 \times 27000)] = [474000 \text{ 천 원}]$$

판매단가                  매출량

- 비용=(식자재 유형별 구입단가 × 식자재 유형별 사용량) 스칼라로 표현되어야 하기 때문에 [행벡터 × 열벡터]의 형식으로 행렬이 표현되어야 함

$$\text{비용} \quad \begin{bmatrix} 10000 & 10000 & 12000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 11000 \\ 15000 \\ 15000 \end{bmatrix} = [380000 \text{ 천 원}]$$

                                구입단가                  사용량

- 순이익=[474000천원]-[380000천원]=[94000천원]

[예제3.11] 주택모델별 외장스타일에 따른 건축할 주택의 수의 구성을 나타내는 행렬 P와 외장스타일에 따른 자재 유형별 투입량은 행렬 Q이다. 각 자재의 유형별 단위당 구입가는 행렬 R이다.

- 1) 모델 A와 모델 B에 소요되는 외장재비는 각각 얼마인가?
- 2) 외장재투입비용을 자재유형별로 계산하라.

$$P = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{현대식} & \text{전통식} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{모델 A} \\ \text{모델 B} \\ \text{모델 C} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 30 \\ 10 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$Q = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{콘크리트} & \text{목재} & \text{벽돌} & \text{첨가제} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{현대식} \\ \text{전통식} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & 2 \\ 50 & 1 & 20 & 2 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$R = \begin{matrix} \text{콘크리트} \\ \text{목재} \\ \text{벽돌} \\ \text{첨가제} \end{matrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 180 \\ 60 \\ 25 \end{bmatrix}$$

(풀이)

1) 외장재비=(각 주택수×자재별투입량)×자재구입단가

$$(PQ)R = \begin{bmatrix} 0 & 30 \\ 10 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 & 2 & 0 & 2 \\ 50 & 1 & 20 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 180 \\ 60 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1500 & 30 & 600 & 60 \\ 1100 & 40 & 400 & 60 \\ 1200 & 60 & 400 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 180 \\ 60 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} 72900 \\ 54700 \\ 60800 \end{bmatrix}$$

2) 자재별 총투입비용 = 자재별 총투입량 × 자재별 구입단가  
 (행벡터)                      행벡터                      열벡터

콘크리트    목재    벽돌    첨가제

$$(PQ)R = \begin{bmatrix} 1500 & 30 & 600 & 60 \\ 1100 & 40 & 400 & 60 \\ 1200 & 60 & 400 & 80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 180 \\ 60 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} \begin{bmatrix} 72900 \\ 54700 \\ 60800 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 3800 & 130 & 1400 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 180 \\ 60 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{matrix} \text{콘크리트} & \text{목재} & \text{벽돌} & \text{첨가제} \\ \hline 76000 & + & 23400 & + & 84000 & + & 5000 \\ \hline \text{총자재투입비} \end{matrix}$$

# 제3절 행렬의 유형

## 1. 단위행렬(항등행렬 identity matrix, unit matrix)

- 주 대각원소가 모두 1이고 나머지 원소가 0으로 이루어진 정방행렬
- 대수법칙의 곱셈의 항등원에 해당한다.
- $m \times n$  행렬인  $A$ 에 대하여  $A$ 에 단위행렬을 곱하거나 단위행렬에  $A$ 를 곱해도  $A$ 는 불변.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad AI = IA = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

## 2. 정방행렬(Square matrix)

- 행과 열의 수가 같은 행렬( $n \times n$ )

## 3. 영행렬(Zero matrix)

- 모든 원소가 0으로 이루어진 행렬
- 반드시 정방행렬일 필요는 없다,
- 대수법칙의 덧셈의 항등원에 해당

## 4. 전치행렬(Transpose matrix)

- 원래의 행렬의 행과 열을 바꾼 행렬
- 행렬 A의 전치행렬은  $A^T$  또는  $A'$  로 표시
- 성질

- ✓  $(A^T)^T = A$
- ✓  $(A+B)^T = A^T + B^T$
- ✓  $(AB)^T = B^T A^T$
- ✓  $(kA)^T = kA^T$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

## 5. 대칭행렬(Symmetric matrix)

- 주대각원소를 제외한 나머지 원소가 주대각원소를 중심으로 대칭적으로 배열된 행렬

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

## 6. 멱등행렬(Idempotent matrix)

- 행렬자신을 곱이 자신의 행렬이 되는 행렬
- 단위행렬, 영행렬도 멱등행렬

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

## 7. 삼각행렬(Triangular matrix)

- 주대각원소를 중심으로 하부 또는 상부의 원소들만이 0이 아니고 나머지 원소는 모두 0으로 이루어진 행렬

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{또는} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & a_{33} \end{bmatrix}$$

## 8. 치환행렬(Permutation matrix)

- 원소가 0이거나 1인 정방행렬로서 각 행과 각 열에 1인 원소가 하나씩 있는 행렬
- 임의의 행렬 A에 앞에서 곱하면 A의 행이 바뀌고(행교환) 뒤에서 곱하면 열이 바뀐(열교환).

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad AB = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix} \quad BA = \begin{bmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{bmatrix}$$

## 9. 역행렬(Inverse matrix)

- 단위행렬이 나오도록 특정행렬에 곱하여진 정방행렬
- 즉 행렬  $A \times B$ 가 단위행렬이 되면( $AB=I$ )  $A$ 의 역행렬은  $B$ 이다. 즉,  $A^{-1}=B$ 이며 또한  $B$ 의 역행렬 즉  $B^{-1}$ 은  $A$ 이다.
- 그러므로  $A$ 와  $B$ 는 정방행렬이어야 함. 단, 정방행렬이라고 해서 모두 역행렬을 가지는 것은 아님.
- 치환행렬의 역행렬은 자신의 전치행렬이다.
- 정방행렬  $A$ 가 그 역행렬을 가지면 비특이행렬(nonsingular matrix)이라고 함.
- 정방행렬  $A$ 가 역행렬을 가지지 않으면 특이행렬(singular matrix)라고 함.
- 성질
  - ✓  $(A^{-1})^{-1}=A$
  - ✓  $A$ 와  $B$ 의 역행렬이 존재할 때  $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$