교과목명: 인문사회수학

교　재　명: 경영수학의 이론과 실제
소　　　속 : 원광대학교 경영학부
담당교수 : 정호일

제 3 장 함수론

제1절 함수의 개념
제2절 함수의 결합과 합성
제3절 함수의 유형

제1절 함수(Function)의 개념

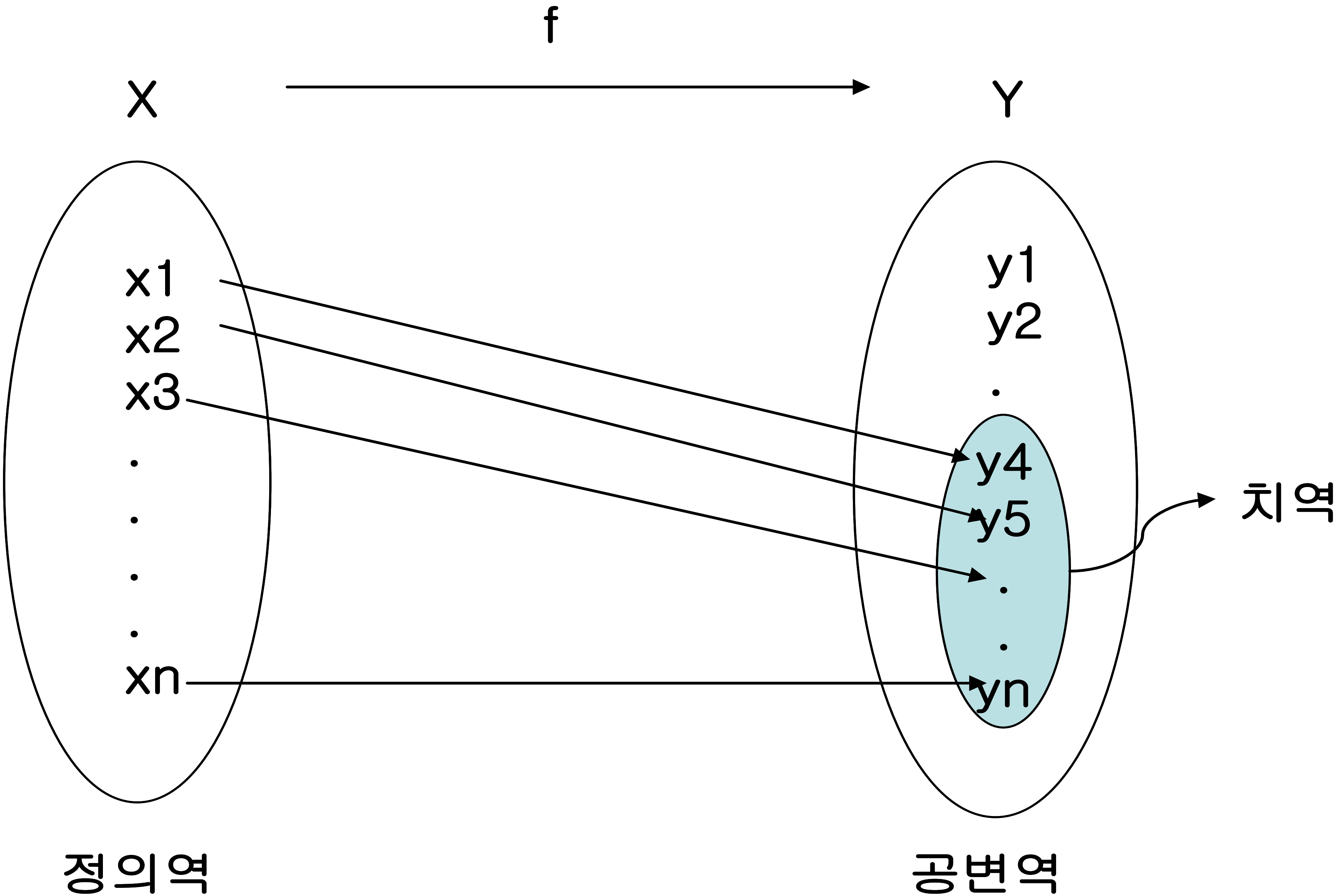
1. 함수의 정의 및 용어

- 집합 X와 Y가 공집합이 아니라고 할 때 만일 X에서 Y로의 관계 f가 다음과 같은 성질을 만족하면 이를 X에서 **Y로의 함수**라고 한다.
  - 조건1: 모든 $x \in X$에 대해 $(x,y) \in f$이다.
    - 즉, 집합 X의 모든 원소 x가 집합 Y의 원소 y와 대응하는 관계임을 의미.(관계성)
  - 조건2: 만일 $(x,y) \in f$이고 $(x,y') \in f$이면 $y=y'$ 이 성립한다.
    - 즉, 원소 x에 대응하는 원소는 오직 한 개만 존재해야 함을 의미(유일성)

- 즉, 공집합이 아닌 두 집합 X,Y에 있어서 X의 각 원에 Y의 원이 하나씩 대응될 때 이 대응을 **A에서 B로의 함수**라고 하며 문자 f를 써서 다음과 같이 나타낸다.

$$f : X \to Y \text{ 또는 } X \xrightarrow{f} Y \text{ 또는 } Y = f(X)$$

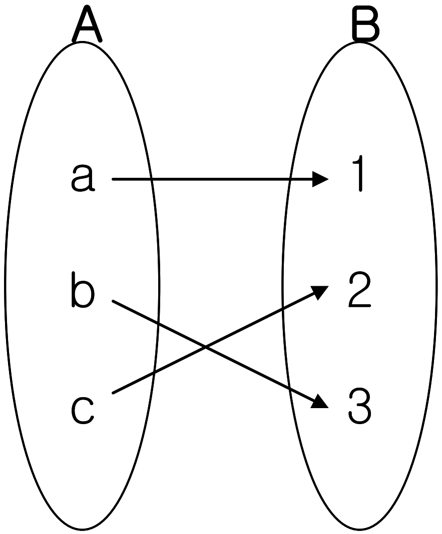
- 이때 집합 X를 함수 f의 정의역(domain), 집합 Y를 함수 f의 공역(codomain)이라 하며,
  f(x)는 정의역 X의 원소 x에 대응하는 Y의 유일한 원소로 f에 대한 x의 상 또는 x에서의 f의 함수값이라 함.
  이때 집합 $\{f(x) \mid x \in X\}$를 이 함수의 치역(range)이라 함.


f
X
Y
x1
x2
x3
.
.
.
.
xn
y1
y2
.
y4
y5
.
.
yn
치역
정의역
공변역

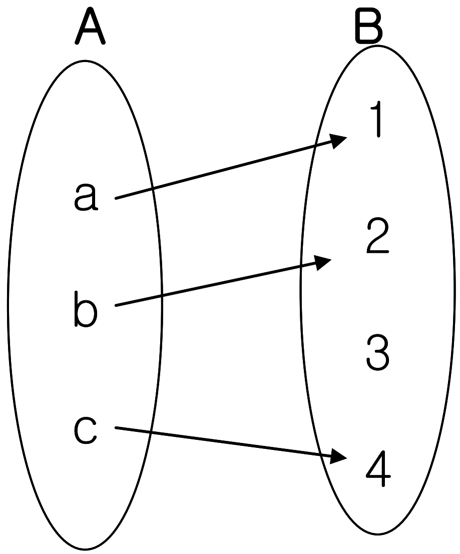
2. 함수의 대응 형태

- 단사함수**(injective function)**
  - 함수 **f: X→Y**에서 정의역 **X**의 임의의 원소 x_1, x_2에 대해 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$인 함수(=일대일함수)
- 전사함수**(surjective function)**
  - 치역과 공역이 같으면 함수
- 전단사함수**(bijective function)**
  - 함수 **f**가 동시에 단사함수이면서 전사함수인 경우

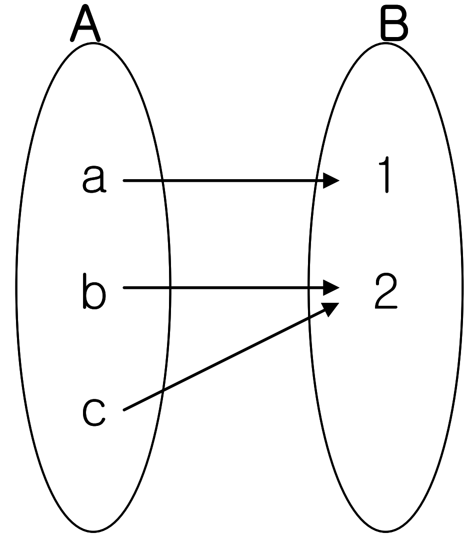
(=쌍사함수 또는 일대일대응함수)



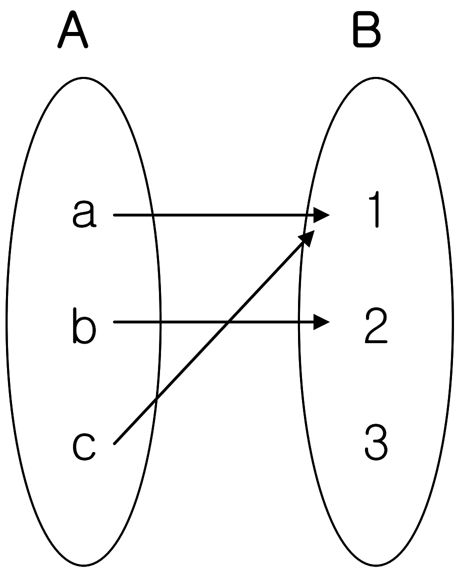
일대일대응(쌍사함수)



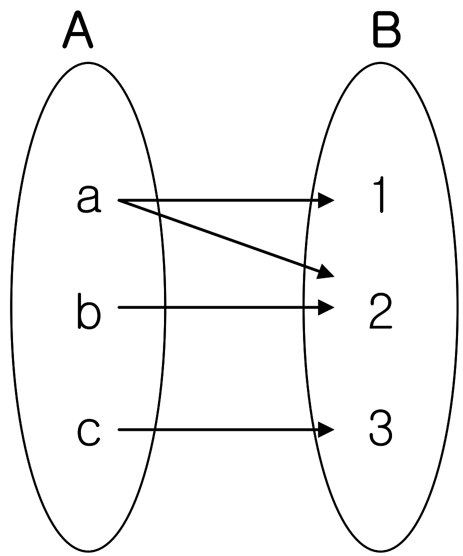
일대일함수(단사함수)



전사함수(O) 일대일함수(X)일대일 대응(X)



함수(O),일대일함수(X)일대일 대응(X)



함수관계(X)

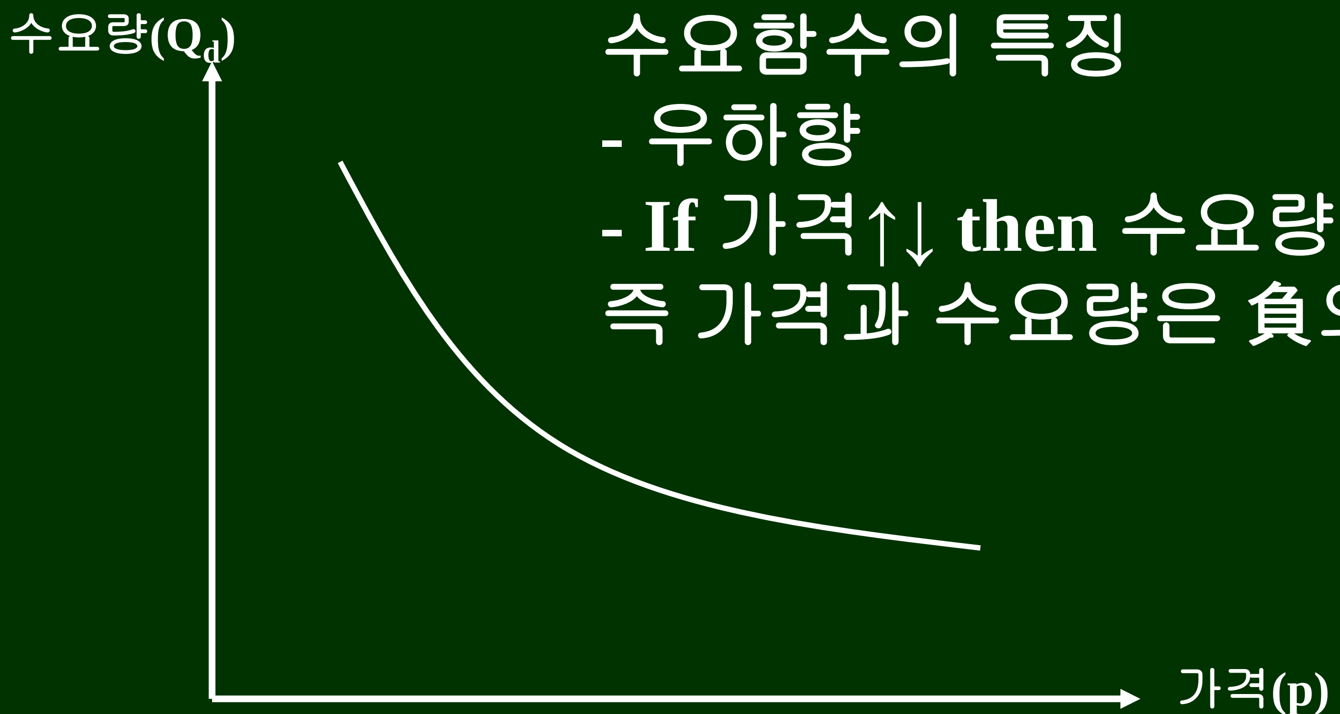
수요함수의 이해

- 수요(demand)
  "소비자가 재화나 용역을 구매하고자 하는 욕구"
- 수요량
  일정기간 동안 소비자가 그 재화나 용역을 구매하고자 하는 수량
- 수요함수
  소비자의 수요에 영향을 미치는 요인들과 수요량과의 관계를 나타내는 함수
- 수요에 영향을 미치는 요인
  재화가격, 대체제가격, 소득, 소비자기호, 광고 등

- 수요함수란 소비자의 수요에 영향을 미치는 요인들과 수요량 간의 관계를 나타내는 함수라 정의. 분석의 단순화를 위해 그 재화의 가격 이외의 모든 변수들이 일정불변이라 가정한다면 하나의 변수로 구성된 함수로 나타낼 수 있음.

$$Q_d = D(p)$$

여기서 Q_d 는 수요량, p 는 그 재화의 가격을 의미.



수요함수의 특징

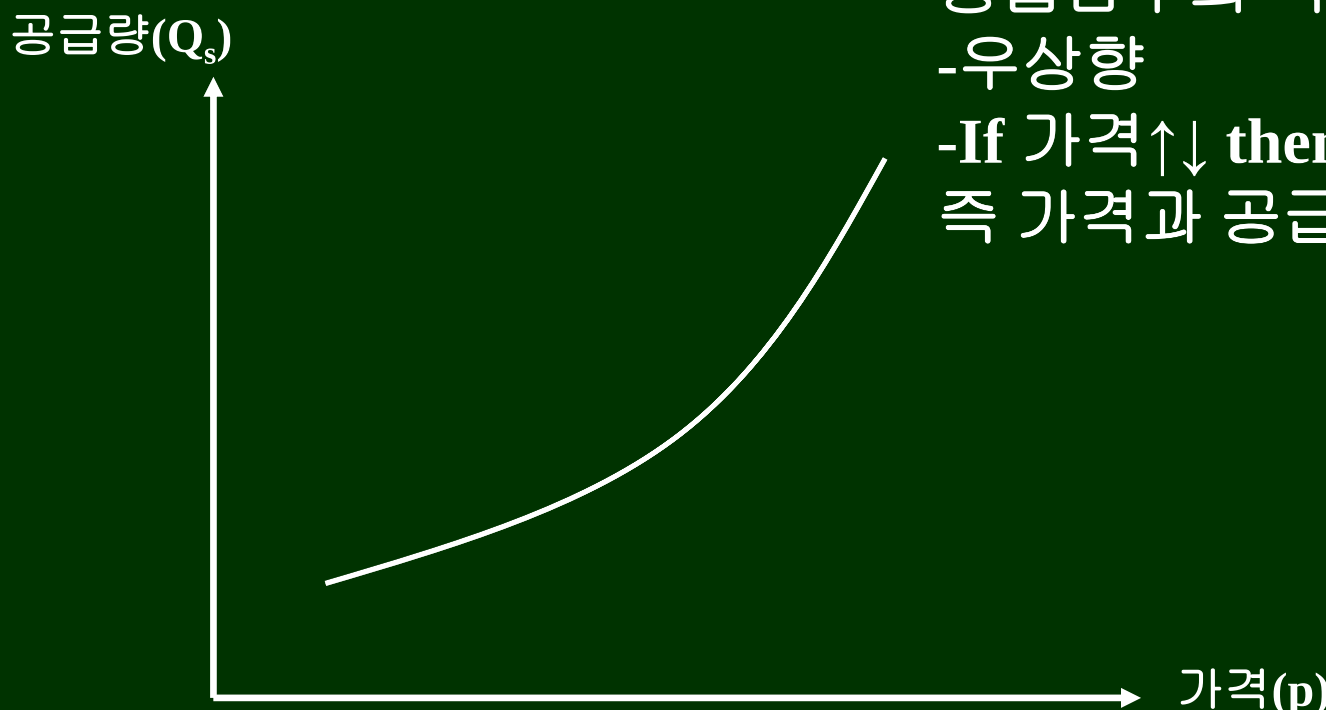
- 우하향
- If 가격↑↓ then 수요량 ↓↑

즉 가격과 수요량은 負의 관계

공급함수의 이해

- 공급(supply)
  “생산자가 재화나 용역을 판매하고자 하는 욕구”
- 공급량
  일정기간 동안 생산자가 그 재화나 용역을 판매하고자 하는 수량
- 공급함수
  생산자의 공급에 영향을 미치는 요인들과 공급량과의 관계를 나타내는 함수
- 공급에 영향을 미치는 요인
  재화가격, 대체제가격, 생산요소의 가격, 기술수준, 기업간 경쟁 등

- **공급함수**는 그 재화의 가격, 다른 재화들의 가격, 자본과 노동 등의 생산요소가격, 기술수준 등의 요인들과 공급량의 관계를 나타내는 함수임. 재화의 가격 이외의 모든 변수들이 일정불변이라 가정한다면 공급량 Q_s는 다음의 형태로 나타낼 수 있다. $Q_s = S(p)$



공급함수의 특징

-우상향

-If 가격↑↓ then 공급량 ↑↓

즉 가격과 공급량은 正의 관계

수요공급의 법칙 이해

- 균형가격
  수요 요인과 공급 요인의 상호작용에 의해서 수요와 공급이 균등해지는 점에서 결정되는데 이를 균형가격(equilibrium price)이라 함.

- 수요공급의 법칙(=수요공급 균등의 법칙)
  수요와 공급이 일치하는 점에서 가격이 결정된다는 관계

- 수요함수를 Q_d 또는 D(p)라하고 공급함수를 Q_s 또는 S(p)라 할 때 균형 수요량과 균형공급량

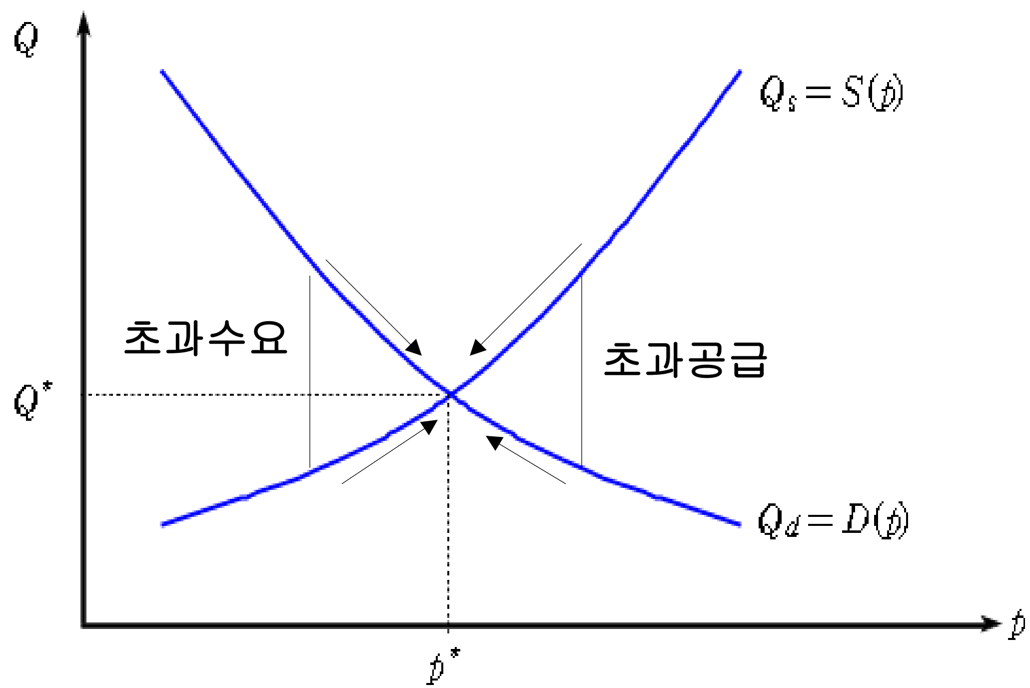
$$Q_d = Q_s \text{ 또는 } D(p) = S(p)$$

- 수요량과 공급량이 일치할 때의 균형조건인 균형가격과 균형수급량은 다음 식을 통해 구할 수 있다.

$$Q_d = Q_s \quad \text{또는} \quad D(p) = S(p)$$

- 시장 균형은 수요곡선과 공급곡선이 교차하는 점에서 달성되며, 이때 얻어지는 가격 p^*와 수급량 Q^*가 곧 균형가격과 균형수급량이 됨.

그림 2-3



균형가격과 균형수급량의 도시

제 2 절 함수의 결합과 합성

1 함수의 결합

- 함수 f와 g가 모두 동일한 정의역 X를 가진다고 할 때 이들 두 함수를 결합하면 다음과 같이 새로운 함수의 정의가 가능.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ (\text{단},\ g(x)\neq 0)$$

f와 g가 다음과 같이 정의될 때 $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$를 구하고 각 함수의 정의역도 구하라.

$$f : R \to R,\ f(x) = x^2 + x - 7$$

$$g : R \to R,\ g(x) = x^2 - 1$$

(풀이)

$(f+g)(x) = (x^2 + x - 7) + (x^2 - 1) = 2x^2 + x - 8$

$(f-g)(x) = (x^2 + x - 7) - (x^2 - 1) = x - 8$

$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 1) = x^4 + x^3 - 8x - x + 7$

$(\frac{f}{g})(x) = \dfrac{(x^2 + x - 7)}{(x^2 - 1)}$

한국전자는 노트북형 PC를 독점생산·판매하고 있다. 이 신형 PC의 생산비용은 생산대수를 Q라 할 때 $C(Q) = 100 + 20Q$로 추정되며, 1주일 수요량 $D(p)$는 가격을 p라 할 때 $D(p) = 40 - \frac{p}{2}$인 것으로 밝혀졌다.

(a) 한국전자의 수입을 판매량 Q의 함수로 나타내어라.

(b) 한국전자의 이익을 판매량 Q의 함수로 나타내어라.

풀이

(a) 수요량 $D(p)$를 Q라 한다면 $Q = 40 - \frac{p}{2}$에서

$$p = (40 - Q)(2) = 80 - 2Q$$

가 됨을 알 수 있다. 따라서 1주일 수입 $R(Q)$는

$$R(Q) = p \cdot Q = (80 - 2Q)(Q) = 80Q - 2Q^2$$

이 된다.

(b) 1주일 이익=1주일 수입−생산비용

$$= (80Q - 2Q^2) - (100 + 20Q)$$

$$= -2Q^2 + 60Q - 100$$

새로운 50시리즈의 타이어를 독점생산하고 있는 고려타이어는 이 제품의 1주일간 수요가 $D(p) = 3,000 - 50p$ 인 것으로 추정하고 있다. 1주일간의 총수입(total revenue)을 판매량 Q 의 함수로 나타내고 이 함수의 정의역과 치역을 구하여라.

판매량이 얼마일 때 1주일간의 총수입이 최대가 되는가?

풀이

1주일간의 수입함수를 $R(Q)$라 한다면 $R(Q) = pQ$ 가 된다. 한편 판매량 Q는 가격 p에 의해 결정되는 수요량과 일치하므로 $Q = 3,000 - 50p$ 에서

$$p = 60 - \frac{Q}{50}$$

수입함수 $R(Q)$는 $$R(Q) = pQ = \left(60 - \frac{Q}{50}\right)Q$$

$$= 60Q - \frac{Q^2}{50}$$

$$R(Q) = -\frac{1}{50}(Q^2 - 3,000Q)$$

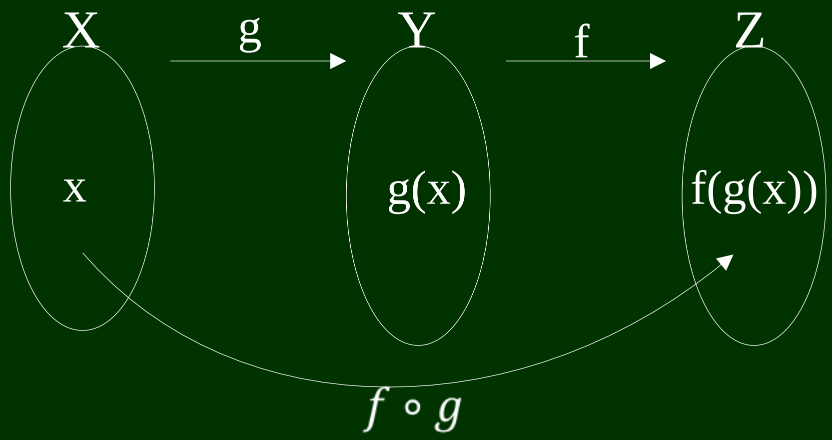
$$= -\frac{1}{50}(Q - 1,500)^2 + 45,000$$

이므로, 판매량 $Q^* = 1,500$일 때 1주일간의 총수입은 45,000으로 최대가 된다.

2. 합성함수

- 두 함수 f와 g에 대하여 g함수의 치역이 f함수의 정의역이 되는 새롭게 만들어진 함수로 정의되며 다음과 같이 나타낸다.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$



■합성함수의 연산법칙

- 항등함수와의 교환법칙은 성립하지만 일반적으로 교환법칙이 성립하지 않는다.
  - ✓항등함수: I(x)=x
  - ✓$(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$
  - ✓$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$
- 결합법칙 성립
  - ✓$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x)$

$f(x)=x^2+1,\ g(x)=2-x,\ h(x)=x$일 때 다음의 합성함수를 구하여라.

(a) $(h\circ(g\circ f))(x)$　　(b) $((h\circ g)\circ f)(x)$

풀이

(a) 우선 $(g\circ f)(x)$부터 구해보면

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+1)=2-x^2-1=1-x^2$$

이 되므로 $(h\circ(g\circ f))(x)=h(1-x^2)=1-x^2$이 된다.

(b) $(h\circ g)(x)=h(g(x))=h(2-x)=2-x$이므로

$$((h\circ g)\circ f)(x)=2-(x^2+1)=1-x^2$$

이 된다.

최고급 디자이너 셔츠를 생산하는 어느 업체의 생산원가구조를 분석한 결과, 생산량에 관계없이 월 8,000만원의 비용이 소요되며, 셔츠 1벌당 자재 및 노무비는 8만원으로 추정되었다. p를 가격이라 하고 x를 판매량이라 할 때 셔츠에 대한 수요는

$$x = 400(50 - p)$$

의 형태를 취한다고 한다.

(a) 생산과 관련된 비용을 p의 함수로 나타내어라.

(b) 셔츠판매를 통한 총수입을 p의 함수로 나타내어라.

(c) 이익은 얼마인가?

(d) 가격을 얼마로 할 때 이익이 최대가 되는가?

풀이

(a) 총비용 $= 8,000 + 8[400(50 - p)] = 168,000 - 3,200p$

(b) 총수입 $= xp = [400(50 - p)]p = 20,000p - 400p^2$

(c) 이 익 $=$ 총수입 $-$ 총비용 $= 20,000p - 400p^2 - 168,000 + 3,200p$

$$= -400p^2 + 23,200p - 168,000$$

(d) 이 익 $= -400(p^2 - 58p) - 168,000 = -400(p - 29)^2 + 168,400$ (단위 : 만원)

이므로, 셔츠 1벌당 29만원일 때, 이익은 16억 8천4백만원으로 최대가 된다.

3. 역함수(Inverse function)

- 함수 $f\colon X\to Y$가 전담사함수라면 공역의 각 원소 y에 대해 $f(x)=y$가 성립하는 X의 원소 x를 대응시키게 되면 Y에서 x로의 새로운 함수를 구할 수 있으며 이 새로운 함수를 f의 역함수라고 하며 다음과 같이 나타낸다.

$$f^{-1}\colon Y\to X \quad \text{또는 } f^{-1}(y)=x$$

- 역함수를 구하는 순서
  ① 전단사함수 판별
    - 단조증가(감소) 함수
    - 도함수에 대입한 임의값이 모두 양수이거나 음수
  ② y=f(x)를 x에 관하여 풀어서 x=g(y)로 정리
  ③ x=g(y)에서 x는 종속변수, y는 독립변수의 역할을 함으로 x는 독립변수로 y는 종속변수로 활용하는 관습에 따라 기호 x,y의 위치를 교환.

■ 예제)

① $y = x + 1$의 역함수를 구하시오.

② $y = \sqrt{x}$의 역함수를 구하시오($x \geq 0$인 실수)

(풀이)

① 단조등가함수이므로 전단사 함수
$x=y-1$ 또는 $f^{-1}(y)=y-1$ 또는 $f^{-1}(x)=x-1$ 또는 $y=x-1$

② 정의역내에서 전담사함수
$x=y^2$ $f^{-1}(y)=y^2$ 또는 $f^{-1}(x)= x^2$ 또는 $y= x^2$

$f : X \to Y$이고 $f^{-1} : Y \to X$일 때 다음과 같이 정의되는 합성함수를 구하여라.

(a) $(f^{-1} \circ f)(x)$ (b) $(f \circ f^{-1})(y)$

풀이

(a) $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$

(b) $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

제 3 절　함수의 유형

1　일변수함수

- 다항함수(polynomial function) :　a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_n이 실수이고 n이 0보다 크거나 같은 정수일 때

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

- 유리함수(rational function)는 $f(x)$, $g(x)$ (단 $g(x) \neq 0$)의 두 다항함수가 주어져 있을 때　$r(x) = f(x) / g(x)$로 정의되는 함수

- 무리함수는 다항함수와 다항함수의 무리식(root) 또는 무리식으로 구성된 함수. 예를 들어 $y = \sqrt{2x}$, $y = \sqrt{2x} + x$ 는 모두 무리함수에 속함

2　다변수함수

- 다변수함수는 두 개 이상의 독립변수를 가지는 함수를 의미함

- 생산함수: 생산에 투입되는 자원의 양과 생산량과의 기술적 관계. 일반적으로 투입물은 자본재와 노동량이다

생산함수란 생산에 투입되는 자원의 양과 이를 이용하여 산출해 낼 수 있는 생산량 간의 관계를 나타낸다. 생산함수 중 가장 널리 알려진 것으로는 다음과 같은 콥-더글러스(Cobb-Douglas)함수를 들 수 있다.

$$Z = F(x,\ y) = ax^k y^{1-k} \quad (0 < k < 1)$$

생산함수 $f(x,\ y)$가 0보다 큰 값인 t 에 대해

$$f(tx,\ ty) = tf(x,\ y)$$

를 만족할 때 생산량은 자원투입량의 증가율만큼 증가하게 되는데, 이와 같은 함수를 일차의 동차함수(homogeneous of degree one)라 한다. 앞에서 정의한 콥-더글러스함수가 일차의 동차함수임을 보여라.

풀이

$f(tx,\ ty)$를 계산해보면

$$\begin{aligned} f(tx,\ ty) &= a(tx)^k(ty)^{1-k} = t^k t^{1-k} \cdot ax^k y^{1-k} \\ &= t^{(k+1-k)} \cdot ax^k y^{1-k} = tf(x,\ y) \end{aligned}$$

가 되어 $f(x,\ y)$는 일차의 동차함수임을 알 수 있다.

$f(tx, ty) = tf(x, y) \Rightarrow$ 규모의 수익불변

$f(tx, ty) > tf(x, y) \Rightarrow$ 규모의 수익증가

$f(tx, ty) < tf(x, y) \Rightarrow$ 규모의 수익감소

생산함수에 따라서는 투입자원의 양을 t배 늘리면 생산량은 t배 이상 증가할 수도 있으며 t배만큼 증가하지 않을 수도 있다. 다음에 주어진 생산함수를 규모관련한 특성에 따라 분류하여라.

(a) $f(x, y) = 10xy$ (b) $f(x, y) = 6x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ (c) $f(x, y) = 8x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{5}}$

풀이

(a) $f(tx, ty) = 10(tx)(ty) = t^2 10xy$이므로 $t > 1$일 때 $f(tx, ty) > tf(x, y)$가 되어 $f(x, y)$는 규모의 수익증가 특성을 지님을 알 수 있다.

(b) 이 함수는 콥-더글러스함수이므로 규모의 수익불변의 특성을 가진다.

(c) $f(tx, ty) = 8(tx)^{\frac{2}{3}}(ty)^{\frac{1}{5}} = t^{\frac{13}{15}}(8x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{5}}) = t^{\frac{13}{15}}f(x, y)$이므로 $t > 1$일 때 $f(tx, ty) < tf(x, y)$가 되어 $f(x, y)$는 규모의 수익감소 특성을 지님