1장 초등논리(Elementary Logic)

김준희

교재

- 집합론/You-Feng Lin, Shwu-Yeng T. Lin 지음/이흥천 옮김/경문사

1.3 항진, 함의, 동치

정의 6

모든 논리적 가능성에 대하여 항상 참인 명제를 항진 또는 항진명제라고 한다.

- 예 : $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

1.3 항진, 함의, 동치

정의 6

모든 논리적 가능성에 대하여 항상 참인 명제를 **항진** 또는 **항진명제**라고 한다.

- 예 : $p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$
T	F	T
F	T	T

1.3 항진, 함의, 동치

정의

단순명제이거나 합성명제인 P, Q에 대한 조건문 $P \to Q$가 항진일 때, 이것을 함의 또는 함의명제라 하고

$$P \Rightarrow Q$$

와 같이 나타낸다. 그리고 'P는 Q를 함의한다.'라고 읽는다.

다음 조건문들은 모두 함의이다.

- $p \to p$
- $p \wedge q \to q \wedge p$
- $p \to p \wedge p$
- $p \wedge q \to q$

정의

단순명제이거나 합성명제인 P, Q에 대한 조건문 $P \to Q$가 항진일 때, 이것을 **함의** 또는 **함의명제**라 하고

$$P \Rightarrow Q$$

와 같이 나타낸다. 그리고 'P는 Q를 함의한다.'라고 읽는다.

다음 조건문들은 모두 함의이다.

- $p \to p$
- $p \wedge q \to q \wedge p$
- $p \to p \wedge p$
- $p \wedge q \to q$

정의

단순명제이거나 합성명제인 P, Q에 대한 조건문 $P \to Q$가 항진일 때, 이것을 **함의** 또는 **함의명제**라 하고

$$P \Rightarrow Q$$

와 같이 나타낸다. 그리고 'P는 Q를 함의한다.'라고 읽는다.

다음 조건문들은 모두 함의이다.

- $p \to p$
- $p \wedge q \to q \wedge p$
- $p \to p \wedge p$
- $p \wedge q \to q$

1.3 항진, 함의, 동치

정의

단순명제이거나 합성명제인 P, Q에 대한 조건문 $P \to Q$가 항진일 때, 이것을 **함의** 또는 **함의명제**라 하고

$$P \Rightarrow Q$$

와 같이 나타낸다. 그리고 'P는 Q를 함의한다.'라고 읽는다.

다음 조건문들은 모두 함의이다.

- $p \to p$
- $p \land q \to q \land p$
- $p \to p \land p$
- $p \land q \to q$

1.3 항진, 함의, 동치

정의

단순명제이거나 합성명제인 P, Q에 대한 조건문 $P \to Q$가 항진일 때, 이것을 함의 또는 함의명제라 하고

$$P \Rightarrow Q$$

와 같이 나타낸다. 그리고 'P는 Q를 함의한다.'라고 읽는다.

다음 조건문들은 모두 함의이다.

- $p \to p$
- $p \land q \to q \land p$
- $p \to p \land p$
- $p \land q \to q$

1.3 항진, 함의, 동치

정리 1

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 함의 법칙 $p \Rightarrow p \vee q$

(b) 단순화법칙 $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \wedge q \Rightarrow q$

(c) 논리합의 삼단논법 $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

1.3 항진, 함의, 동치

정리 1

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 함의 법칙 $p \Rightarrow p \vee q$

(b) 단순화법칙 $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \wedge q \Rightarrow q$

(c) 논리합의 삼단논법 $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

정리 1

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 합의 법칙 $p \Rightarrow p \vee q$

(b) 단순화법칙 $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \wedge q \Rightarrow q$

(c) 논리합의 삼단논법 $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

1.3 항진, 함의, 동치

정리 1

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 합의 법칙 $p \Rightarrow p \vee q$

(b) 단순화법칙 $p \wedge q \Rightarrow p$, $p \wedge q \Rightarrow q$

(c) 논리합의 삼단논법 $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$

(c)의 증명

$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim p$	$\rightarrow$	q
T		T				T
T		F				F
F		T				T
F		F				F
단계 1		1				1

그러므로, $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$이다.

1.3 항진, 함의, 동치

정의

쌍조건문 $P \leftrightarrow Q$가 항진일 때, P, Q는 동치라 하고

$$P \Leftrightarrow Q$$

와 같이 나타낸다.

- 17페이지 정의 3으로부터 $P \Leftrightarrow Q$와 $P \equiv Q$는 같은 뜻을 지니므로 두 기호 $\Leftrightarrow$, $\equiv$를 편의에 따라 번갈아 이용하기로 한다.

정의

쌍조건문 $P \leftrightarrow Q$가 항진일 때, P, Q는 동치라 하고

$$P \Leftrightarrow Q$$

와 같이 나타낸다.

- 17페이지 정의 3으로부터 $P \Leftrightarrow Q$와 $P \equiv Q$는 같은 뜻을 지니므로 두 기호 $\Leftrightarrow$, $\equiv$를 편의에 따라 번갈아 이용하기로 한다.

1.3 항진, 함의, 동치

정리 2

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 이중부정법칙 $\sim(\sim p) \equiv p$

(b) 교환법칙 $p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \vee q \equiv q \vee p$

(c) 멱등법칙 $p \wedge p \equiv p, \quad p \vee p \equiv p$

(d) 대우법칙 $p \to q \equiv (\sim q \to \sim p)$

정리 2

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 이중부정법칙 $\sim(\sim p) \equiv p$

(b) 교환법칙 $p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \vee q \equiv q \vee p$

(c) 멱등법칙 $p \wedge p \equiv p, \quad p \vee p \equiv p$

(d) 대우법칙 $p \rightarrow q \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$

정리 2

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 이중부정법칙 $\sim(\sim p) \equiv p$

(b) 교환법칙 $p \wedge q \equiv q \wedge p$, $p \vee q \equiv q \vee p$

(c) 멱등법칙 $p \wedge p \equiv p$, $p \vee p \equiv p$

(d) 대우법칙 $p \rightarrow q \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$

정리 2

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 이중부정법칙 $\sim(\sim p) \equiv p$

(b) 교환법칙 $p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \vee q \equiv q \vee p$

(c) 멱등법칙 $p \wedge p \equiv p, \quad p \vee p \equiv p$

(d) 대우법칙 $p \rightarrow q \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$

정리 2

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 이중부정법칙 $\sim(\sim p) \equiv p$

(b) 교환법칙 $p \wedge q \equiv q \wedge p, \quad p \vee q \equiv q \vee p$

(c) 멱등법칙 $p \wedge p \equiv p, \quad p \vee p \equiv p$

(d) 대우법칙 $p \to q \equiv (\sim q \to \sim p)$

(d)의 증명

$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim q$	$\rightarrow$	$\sim p)$
단계 1		1				

그러므로, $p \rightarrow q \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$이다.

정리 3 드 모르간의 법칙

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

(b) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

정리 3 드 모르간의 법칙

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

(b) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

정리 3 드 모르간의 법칙

임의의 명제 p, q에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

(b) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

(a)의 증명

	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p$	$\vee$	$\sim q)$
단계		1		1				

그러므로, $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$이다.

정리 4

임의의 명제 p, q, r에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 결합법칙

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r),$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

(b) 분배법칙

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

(c) 추이법칙

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$$

증명

Leave to students. Be careful! There are some errors in the proof of (c).

정리 4

임의의 명제 p, q, r에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 결합법칙 $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$,
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

(b) 분배법칙 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(c) 추이법칙 $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$

증명

Leave to students. Be careful! There are some errors in the proof of (c).

정리 4

임의의 명제 p, q, r에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 결합법칙 $$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r),$$ $$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

(b) 분배법칙 $$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$ $$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

(c) 추이법칙 $$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$$

증명

Leave to students. Be careful! There are some errors in the proof of (c).

정리 4

임의의 명제 p, q, r에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 결합법칙 $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$,
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

(b) 분배법칙 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(c) 추이법칙 $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$

증명

Leave to students. Be careful! There are some errors in the proof of (c).

정리 4

임의의 명제 p, q, r에 대하여 다음이 성립한다.

(a) 결합법칙
$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r),$$
$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

(b) 분배법칙
$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$$
$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

(c) 추이법칙
$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$$

증명

Leave to students. Be careful! There are some errors in the proof of (c).

1.3 항진, 함의, 동치

정리 5∼6

Leave to students.

연습문제 1.3

1, 2, 3, 4, 5, 11 번 : 스스로 해결, 질문은 연구실로

1.4 모순

정의

모든 논리적 가능성에 대하여 진리값이 거짓인 명제를 모순 또는 모순명제(항위명제)라고 한다.

- 예 : $p \wedge \sim p$

1.4 모순

정의

모든 논리적 가능성에 대하여 진리값이 거짓인 명제를 모순 또는 모순명제(항위명제)라고 한다.

- 예 : $p \wedge \sim p$

정리 7

항진 t, 모순 c, 임의의 명제 p에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $p \wedge t \Leftrightarrow p, \quad p \vee t \Leftrightarrow t$

(b) $p \vee c \Leftrightarrow p, \quad p \wedge c \Leftrightarrow c$

(c) $c \Rightarrow p, \quad p \Rightarrow t$

1.4 모순

정리 7

항진 t, 모순 c, 임의의 명제 p에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $p \wedge t \Leftrightarrow p, \quad p \vee t \Leftrightarrow t$

(b) $p \vee c \Leftrightarrow p, \quad p \wedge c \Leftrightarrow c$

(c) $c \Rightarrow p, \quad p \Rightarrow t$

정리 7

항진 t, 모순 c, 임의의 명제 p에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $p \wedge t \Leftrightarrow p, \quad p \vee t \Leftrightarrow t$

(b) $p \vee c \Leftrightarrow p, \quad p \wedge c \Leftrightarrow c$

(c) $c \Rightarrow p, \quad p \Rightarrow t$

정리 7

항진 t, 모순 c, 임의의 명제 p에 대하여 다음이 성립한다.

(a) $p \wedge t \Leftrightarrow p, \quad p \vee t \Leftrightarrow t$

(b) $p \vee c \Leftrightarrow p, \quad p \wedge c \Leftrightarrow c$

(c) $c \Rightarrow p, \quad p \Rightarrow t$

1.4 모순

증명

(a)

p	$\wedge$	t	$\leftrightarrow$	p
단계 1		1		

그러므로, $p \wedge t \Leftrightarrow p$이다.

증명

(b)

p	$\vee$	c	$\leftrightarrow$	p
단계 1		1		

그러므로, $p \vee c \Leftrightarrow p$이다.

연습문제 1.4

1, 2, 3 번 과제물 : 3월 19일(수) 제출

1.5 연역적 추론

- 주어진 법칙 혹은 명제를 증명할 때, 그것과는 다른 이미 알려진 공리, 정의, 정리, 추론규칙 등을 사용하여 연역적으로 증명할 수 있다.
- 다음 예제 5에서 사용한 증명법을 연역적 추론 또는 연역적 방법이라 한다. (진리표를 사용한 증명과는 다른 방법)

예제 5

대우 $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$를 증명하여라.

풀이

$$
\begin{aligned}
p \to q &\equiv \sim (p \wedge \sim q) && \text{(조건문의 정의)} \\
&\equiv \sim (\sim q \wedge p) && \text{(교환법칙)} \\
&\equiv \sim [\sim q \wedge \sim (\sim p)] && \text{(이중부정)} \\
&\equiv \sim q \to \sim p && \text{(조건문의 정의)}
\end{aligned}
$$

그러므로 추이율에 의하여 $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$. □

예제 5

대우 $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$를 증명하여라.

풀이

$$\begin{aligned} p \to q &\equiv \sim (p \wedge \sim q) && \text{(조건문의 정의)} \\ &\equiv \sim (\sim q \wedge p) && \text{(교환법칙)} \\ &\equiv \sim [\sim q \wedge \sim (\sim p)] && \text{(이중부정)} \\ &\equiv \sim q \to \sim p && \text{(조건문의 정의)} \end{aligned}$$

그러므로 추이율에 의하여 $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$. $\square$

예제 6(논리합의 삼단논법)

$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$을 증명하여라.

풀이

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge \sim p &\equiv \sim p \wedge (p \vee q) && (\text{교환법칙}) \\
&\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) && (\text{분배법칙}) \\
&\equiv c \vee (\sim p \wedge q) && (\sim p \wedge p \equiv c) \\
&\equiv (\sim p \wedge q) \vee c && (\text{교환법칙}) \\
&\equiv \sim p \wedge q && (p \vee c \equiv p) \\
&\Rightarrow q && (\text{단순화법칙})
\end{aligned}
$$

그러므로 추이율에 의하여 $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$이다. □

예제 6(논리합의 삼단논법)

$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$을 증명하여라.

풀이

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge \sim p &\equiv \sim p \wedge (p \vee q) && \text{(교환법칙)} \\
&\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q) && \text{(분배법칙)} \\
&\equiv c \vee (\sim p \wedge q) && (\sim p \wedge p \equiv c) \\
&\equiv (\sim p \wedge q) \vee c && \text{(교환법칙)} \\
&\equiv \sim p \wedge q && (p \vee c \equiv p) \\
&\Rightarrow q && \text{(단순화법칙)}
\end{aligned}
$$

그러므로 추이율에 의하여 $(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$이다. □

참고 : 이출법칙의 예

1. p : S는 소금이다.
2. q : W는 물이다.
3. r : $S + W$는 소금물이다.
4. $p \wedge q \rightarrow r$:

1.5 연역적 추론

참고 : 이출법칙의 예

1. p : S는 소금이다.
2. q : W는 물이다.
3. r : $S+W$는 소금물이다.
4. $p \wedge q \rightarrow r$:

참고 : 이출법칙의 예

1. p : S는 소금이다.
2. q : W는 물이다.
3. r : $S+W$는 소금물이다.
4. $p \wedge q \rightarrow r$:

1.5 연역적 추론

참고 : 이출법칙의 예

1. p : S는 소금이다.
2. q : W는 물이다.
3. r : $S+W$는 소금물이다.
4. $p \wedge q \to r$:

참고 : 이출법칙의 예

1. p : S는 소금이다.
2. q : W는 물이다.
3. r : $S+W$는 소금물이다.
4. $p \wedge q \rightarrow r$:

1.5 연역적 추론

참고 : 이출법칙의 예

1. p : S는 소금이다.
2. q : W는 물이다.
3. r : $S+W$는 소금물이다.
4. $p \wedge q \to r$: S가 소금이고 W가 물이면, $S+W$는 소금물이다.

1.5 연역적 추론

참고 : 이출법칙의 예

1. p : S는 소금이다.
2. q : W는 물이다.
3. r : $S + W$는 소금물이다.
4. $p \wedge q \to r$: S가 소금이고 W가 물이면, $S + W$는 소금물이다.
5. $p \to (q \to r)$:

참고 : 이출법칙의 예

1. p : S는 소금이다.
2. q : W는 물이다.
3. r : $S+W$는 소금물이다.
4. $p \wedge q \rightarrow r$: S가 소금이고 W가 물이면, $S+W$는 소금물이다.
5. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$: S가 소금일 때 (W가 물이면 $S+W$는 소금물이다).

특히, 예제 7에 주어진 법칙이 성립한다.

1.5 연역적 추론

예제 7

다음 이출법칙을 증명하여라.

$$p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$$

풀이

$$\begin{aligned} p \to (q \to r) &\equiv p \to \sim (q \wedge \sim r) && \text{(조건문의 정의)} \\ &\equiv \sim [p \wedge (q \wedge \sim r)] && \text{(조건문의 정의, 이중부정)} \\ &\equiv \sim [(p \wedge q) \wedge \sim r] && \text{(결합법칙)} \\ &\equiv p \wedge q \to r && \text{(조건문의 정의)} \end{aligned}$$

그러므로 $p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$이다. □

예제 7

다음 이출법칙을 증명하여라.

$$p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$$

풀이

$$\begin{aligned} p \to (q \to r) &\equiv p \to \sim (q \wedge \sim r) && \text{(조건문의 정의)} \\ &\equiv \sim [p \wedge (q \wedge \sim r)] && \text{(조건문의 정의, 이중부정)} \\ &\equiv \sim [(p \wedge q) \wedge \sim r] && \text{(결합법칙)} \\ &\equiv p \wedge q \to r && \text{(조건문의 정의)} \end{aligned}$$

그러므로 $p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$이다. □

예제 8

$$(p \to r) \vee (q \to s) \equiv (p \wedge q \to r \vee s)$$

를 증명하여라.

풀이

$$\begin{aligned}
(p \to r) \vee (q \to s) &\equiv \sim (p \wedge \sim r) \vee \sim (q \wedge \sim s) && \text{(조건문의 정의)} \\
&\equiv (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee s) && \text{(드 모르간의 법칙, 이중부정)} \\
&\equiv \sim p \vee (r \vee \sim q) \vee s && \text{(결합법칙)} \\
&\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \vee s && \text{(교환법칙)} \\
&\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s) && \text{(결합법칙)}
\end{aligned}$$

예제 8

$$(p \to r) \vee (q \to s) \equiv (p \wedge q \to r \vee s)$$

를 증명하여라.

풀이

$$\begin{aligned}
(p \to r) \vee (q \to s) &\equiv \sim (p \wedge \sim r) \vee \sim (q \wedge \sim s) && \text{(조건문의 정의)} \\
&\equiv (\sim p \vee r) \vee (\sim q \vee s) && \text{(드 모르간의 법칙, 이중부정)} \\
&\equiv \sim p \vee (r \vee \sim q) \vee s && \text{(결합법칙)} \\
&\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \vee s && \text{(교환법칙)} \\
&\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s) && \text{(결합법칙)}
\end{aligned}$$

1.5 연역적 추론

$$
\begin{aligned}
&\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (r \vee s) && \text{(결합법칙)} \\
&\equiv \sim (p \wedge q) \vee \sim [\sim (r \vee s)] && \text{(드 모르간의 법칙,} \\
& && \text{이중부정)} \\
&\equiv \sim [(p \wedge q) \wedge \sim (r \vee s)] && \text{(드 모르간의 법칙,} \\
&\equiv p \wedge q \to r \vee s && \text{(조건문의 정의)}
\end{aligned}
$$

그러므로 $(p \to r) \vee (q \to s) \equiv (p \wedge q \to r \vee s)$이다. □

연습문제 1.5

- 1조 : 1∼2 번   2조 : 3∼4 번
- 3조 : 5∼6 번   4조 : 7∼8 번
- 5조 : 9∼10 번   6조 : 11∼12 번
- 7조 : 13∼14 번

  x는 7조의 구성원이다 $\equiv \sim$ (x는 수교 1학년이다)
- 3월 25일(화) 제출, 제출시 조활동에 참여한 학생의 명단만 적을 것.