선형변환과 부분공간

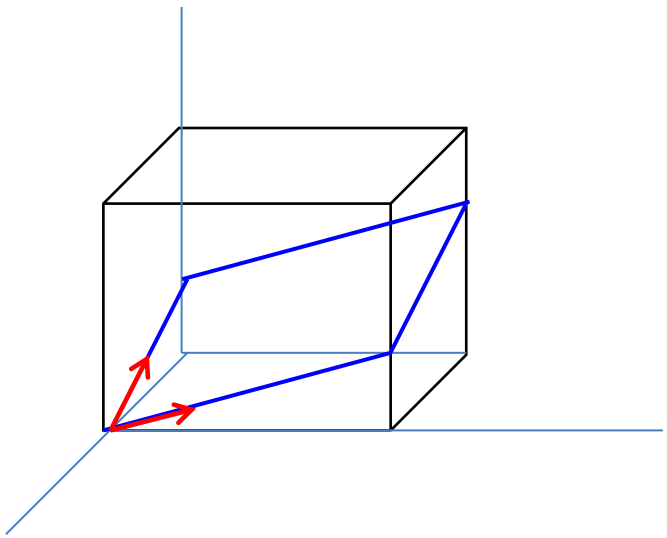
(Linear transformation and Subspaces)

Keon M. Lee

- 부분공간
- 열공간 (column space)
- 영공간 (nullspace)
- 행공간 (row space)
- 좌 영공간 (left nullspace)
- 기저 (basis)
- 좌표와 좌표벡터
- 차원 (dimension)
- 계수 (rank)
- 선형시스템과 영 공간의 관계

벡터공간의 부분공간

- 벡터공간의 부분공간(subspace)
  - 다음 조건을 만족하는 벡터공간의 부분집합 H
    - $\mathbf{0} \in H$
    - $\text{if } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H, \text{ then } \mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$
    - $\text{if } \mathbf{u} \in H \text{ and } c \in \mathcal{R}, \text{ then } c\mathbf{u} \in H$



  - 모든 부분공간은 영(zero) 벡터를 포함

벡터공간의 부분공간

- 영 부분공간 (zero subspace)
  - 영벡터 만으로 구성된 집합 { **0** }

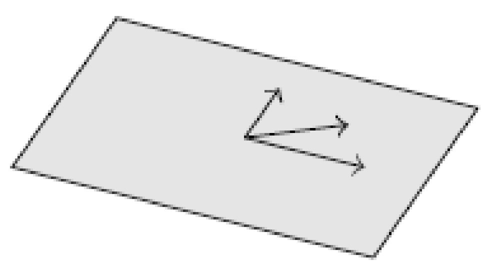
- 행렬 A에 의한 선형변환

$$\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mapsto A\mathbf{x} \in \mathcal{R}^m \qquad A \in \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^n$$

$$A = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n]$$

$$span\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n\} = \{x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n \mid x_i \in \mathcal{R}\}$$

$$span\{\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_n\} \in \mathcal{R}^m$$



열공간(column space)

- 행렬 A의 열공간(column space, range, image) Col A
  - 행렬 A의 열 (column)벡터들의 모든 선형결합의 집합

$$ColA = \{x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m \mid \forall x_i \in \mathcal{R}\} = \{\mathbf{A}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{R}^m\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 2c_1 \end{bmatrix}$$

열공간(column space)

❖ 행렬 A의 열공간(column space, range, image) Col A

- 행렬 A의 열 (column)벡터들의 모든 선형결합의 집합

$$Col\mathbf{A} = \{x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m \mid \forall x_i \in \mathcal{R}\} = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{R}^m\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -4 & 6 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

b는 *A*의 열공간 속에 있는가?

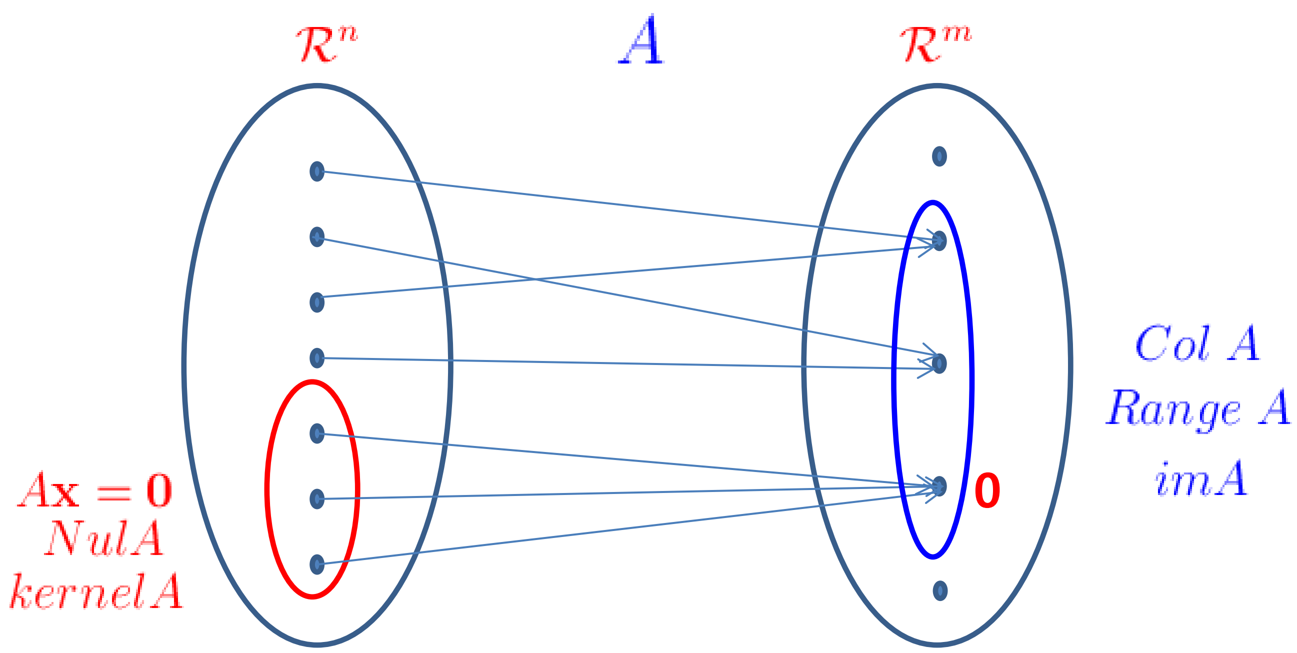
$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ -4 & 6 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & 6 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & -2 & -6 & 5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & -6 & -18 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

해를 가짐 ➔ b는 A의 열공간에 존재

영공간 (null space)

- 행렬 A의 영공간(null space, kernel) Nul A
  - 동차 선형시스템 Ax = **0**의 모든 해의 집합

$$\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \mapsto A\mathbf{x} \in \mathcal{R}^m \qquad A \in \mathcal{R}^m \times \mathcal{R}^n$$



영공간 (null space)

❖ 영공간 계산

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = 2r + s - 3t \\ x_2 = r \\ x_3 = -2s + 2t \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$NulA = span \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

행공간(row space)

❖ 행렬 A의 행공간(row space) Row A

- 행렬 A의 행(row)들의 모든 선형결합의 집합

$$Row\,\mathbf{A} = \{c_1\mathbf{a}_1^\top + \cdots + c_m\mathbf{a}_m^\top \mid \forall x_i \in \mathcal{R}\} = span\{\mathbf{a}_1^\top, \cdots, \mathbf{a}_m^\top\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 16 & 9 \\ 15 & 10 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad c_1(1,0,2) + c_2(0,1,0) = (c_1, c_2, 2c_1)$$

행공간(row space)

❖ 두 공간의 직교 (orthogonal)

- 한 공간의 벡터가 다른 공간의 벡터와 직교

❖ 행공간(row space)와 영공간(nullspace)의 직교

- 행공간 $Row\mathbf{A} = \{c_1\mathbf{a}_1^\top + \cdots + c_m\mathbf{a}_m^\top \,|\, \forall c_i \in \mathcal{R}\}$
- 영공간 $A\mathbf{x} = 0$

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \\ \mathbf{a}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_i^\top\mathbf{x} = 0$$

$$(c_1\mathbf{a}_1^\top + \cdots + c_m\mathbf{a}_m^\top)\mathbf{x} = c_1\mathbf{a}_1^\top\mathbf{x} + \cdots + c_m\mathbf{a}_i^\top\mathbf{x} = 0$$

행공간 벡터 영공간 벡터

- 행공간과 영공간은 직교

영공간과 열공간 계산

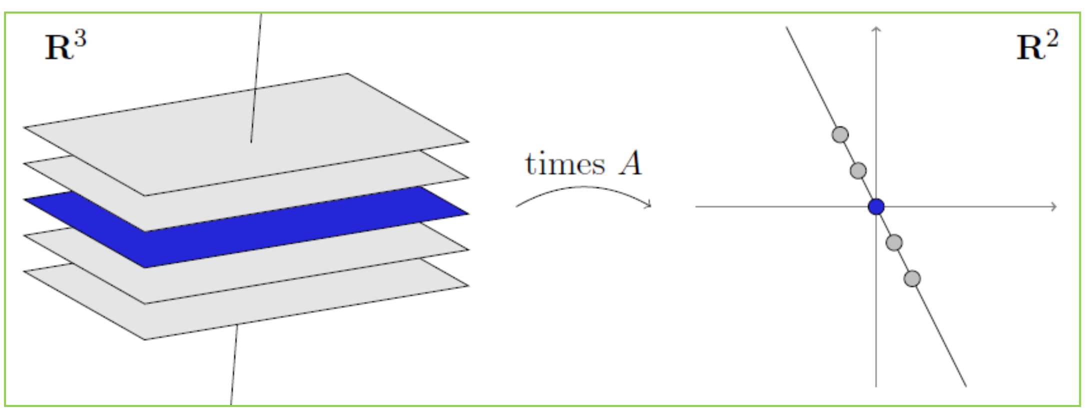
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -2 & -4 & 12 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{x} = 0 \qquad [A \ \ \mathbf{0}] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 0 \\ -2 & -4 & 12 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 + 6x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad NulA = span \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

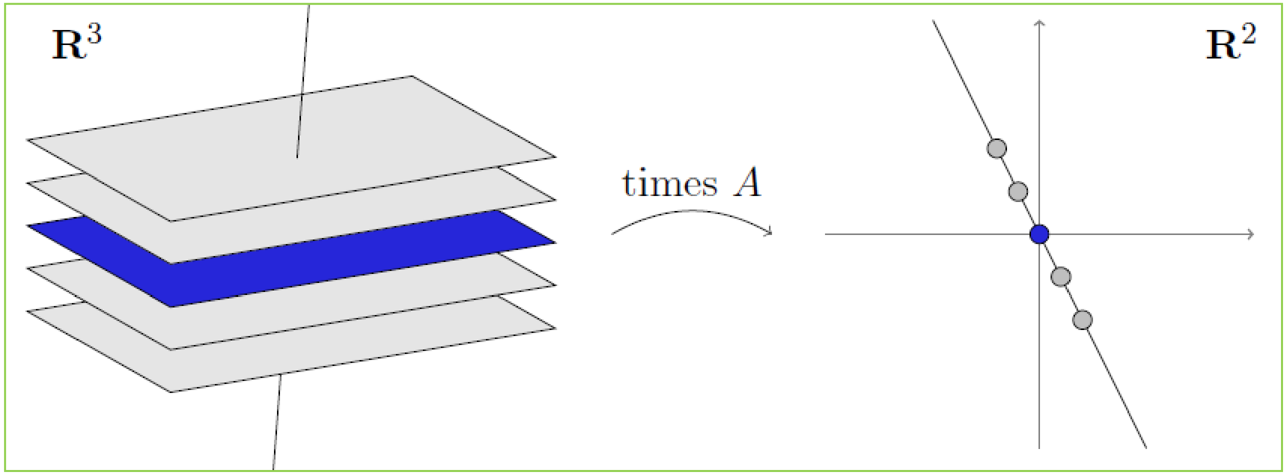
$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -6 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - 6x_3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 12x_3 \end{bmatrix} = (x_1 + 2x_2 - 6x_3) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

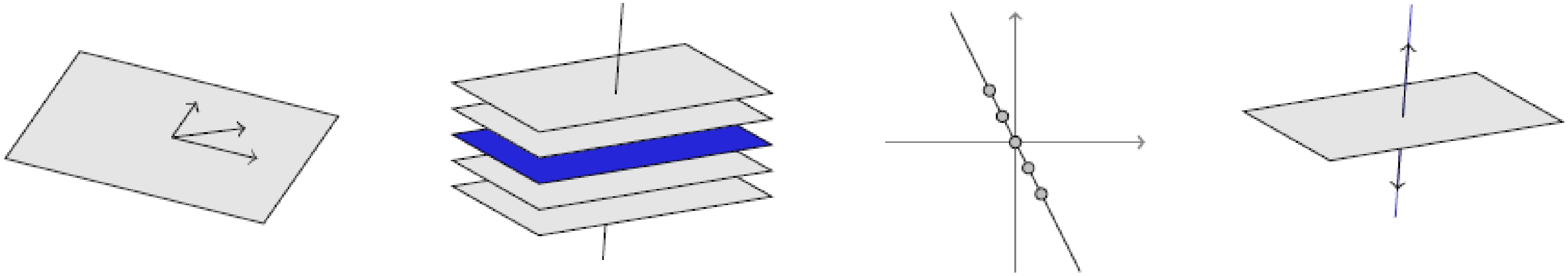
$$ColA = span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$



부분공간

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -6 \\ -2 & -4 & 12 \end{bmatrix} \quad NulA = span\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad ColA = span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$





span nullspace column space row space

기저 (basis)

❖ 벡터공간의 **기저**(basis)

- 벡터공간을 생성(span)하는 선형독립(linearly independent)인 벡터의 집합

$$A=\begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = 2r + s - 3t \\ x_2 = r \\ x_3 = -2s + 2t \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = r\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} + s\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} + t\underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}}$$

$$NulA = span\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$: basis of the null space of A

주축열(pivotal column)

- 추축열(pivotal column)
  - 행 사다리꼴에서 추축(pivot)을 갖는 행렬의 열

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

기저 (basis)

❖ 행렬 A의 추축열(pivotal column)들은 열공간(column space)의 기저가 된다.

- 선형독립인 열들이 기저를 구성한다.
- 행 사다리꼴(row echelon form)에서 추축열들은 선형독립이다.
- 행 사다리꼴에서 추축열 자체가 기저가 되지 않을 수 있다.(0행이 있는 경우)
- 추축열의 개수 만큼 선형독립인 행이 존재하다. 즉, 선형독립인 행공간(row space)의 기저가 추축을 포함한 행들로 구성된다.

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

좌표 (coordinate)와 좌표벡터

- 기저를 이용한 벡터 표현의 유일성
  - 벡터공간 V의 기저(basis) $B = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$에 대한 임의의 벡터 $\boldsymbol{v}$의 표현은 단일하게 표현됨

$$\mathrm{V} = \mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m)$$

(귀류법에 의한 증명) 벡터 $\boldsymbol{v}$가 두 가지 방법으로 표현 가능하다고 가정

$$\mathbf{v} = \mathrm{c}_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$$
$$\mathbf{v} = \mathrm{d}_1\mathbf{v}_1 + \cdots + d_m\mathbf{v}_m$$
$$(\mathrm{c}_1 - d_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (c_m - d_m)\mathbf{v}_m = \mathbf{0}.$$
$$\mathrm{c}_i - d_i = 0, \forall i$$

$\therefore$ 임의의 벡터 $\boldsymbol{v}$가 주어진 기저에 의해 유일하게 표현됨

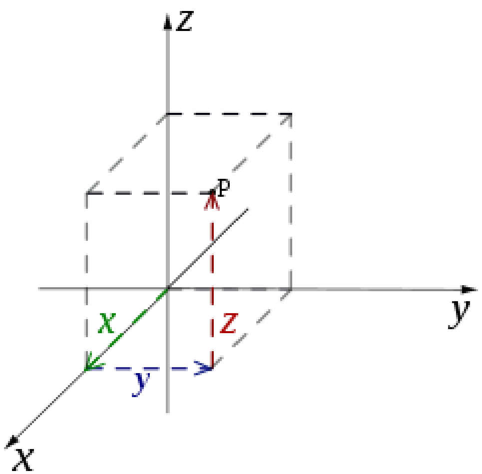
충북대학교 전자정보대학
소프트웨어학과

좌표 (coordinate)와 좌표벡터

- 좌표 (coordinate)
  - 기저벡터를 사용하여 벡터를 나타낼 때, 기저벡터에 대한 스칼라 값

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$$

$$coordinate : c_1, c_2, \ldots, c_m \qquad coordinate\ vector : \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

표준기저
(standard basis)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

좌표 : 2, 3, 1
좌표벡터

차원 (dimension)

❖ 부분공간 H의 차원 dim H

- H에 대한 기저(basis)를 구성하는 벡터의 개수
- 영 부분공간 {0}의 차원은 0이라고 정의

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 6 & -1 & 1 & -7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & -2 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 = 2r + s - 3t \\ x_2 = r \\ x_3 = -2s + 2t \\ x_4 = s \\ x_5 = t \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$NulA = span\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

영공간의 차원 dim(Nul A) = 3

자유변수(free var.)의 개수 = dim(Nul A)

계수 (rank)

❖ 계수(rank)

- rank A는 행렬 A의 열공간의 차원

- A의 추축열들이 Col A의 기저를 구성
- A의 rank는 추축열의 개수

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & -6 & 4 & 14 & -20 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim\sim \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Rank(A) = Rank(A^\top)$$

rank A = 3

계수 정리

❖ 계수 정리 (rank theorem)

- 행렬 A가 n개의 열(column)을 가지면 rank A + dim Nul A = n이다.

- dim Nul A를 A의 nullity라고도 함.
- rank-nullity theorem 이라고도 함

- rank A : 추축열(pivotal column) 개수
- dim Nul A : 자유변수(free variable) 개수

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

좌 영공간(Left nullspace)

❖ 좌 영공간(left nullspace)

- 전치행렬의 영공간

$$Null\, A^\top = \{\mathbf{x} \,|\, A^\top \mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x}^\top A = \mathbf{0}^\top\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

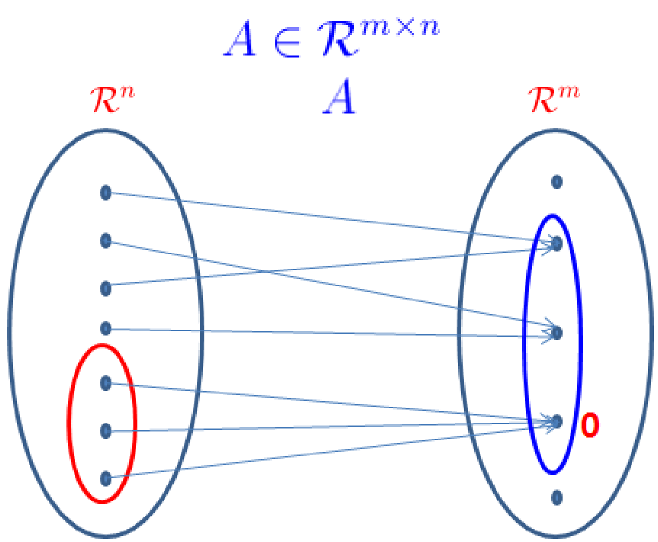
$Nul\ A \in \mathcal{R}^n$

$Row\ A \in \mathcal{R}^n$

$Row\ A \perp Nul\ A$

$Row\ A = Col\ A^\top$

$Nul\ A \perp Col\ A^\top$



$Col\ A \in \mathcal{R}^m$

$Nul\ A^\top \in \mathcal{R}^m$

$Nul\ A^\top \perp Col\ A$

충북대학교 전자정보대학
소프트웨어학과

Rank A = Rank A^T

❖ Rank A
- 행렬에서 추축열(pivotal column)이 Col A의 기저(basis)가 됨

❖ Rank A^T
- A^T 에서 Col A^T 는 A에서 Row A에 해당. Col A^T = Row A
- A에 대해 기약 행 축약(rref)를 만들어 추축(pivot)을 확인
- Row A에서 기저는 추축행(pivotal row)에 대응
  - 행연산에 의해 추축행으로 부터 행렬의 행 재구성 가능
- 추축행(pivotal row)의 개수 = 추축(pivot)의 개수 = 추축열의 개수

- Rank A = Rank A^T

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ax = b의 해와 영 공간(Null space)관계

❖ **Ax = b**의 해

- 모든 x′ ∈ Nul A는 Ax′ = 0의 해이다.

- y가 Ax = b의 해이고, x′∈ Nul A일 때, x′+ y도 해이다.

가역행렬 정리

❖ 가역행렬 정리 (추가)

- nxn 가역행렬(invertible matrix) A에 대해, 다음 사실과 등가임

m. A의 열들은 R^n의 기저(basis)이다.

n. Col A = R^n

o. dim Col A = n

p. rank A = n

q. Nul A = {0}

r. dim Nul A = 0

Summary

- 부분공간은 벡터공간의 성질을 만족하는, 공간의 부분집합이다.
- 선형변환과 관련된 주요 부분공간으로 영공간, 열공간, 행공간, 좌 영공간이 있다.
- 영공간은 동차 선형시스템 Ax = **0**의 모든 해의 집합이다.
- 열공간은 주어진 행렬에 대한 열벡터들의 모든 선형결합의 집합이다.
- 행공간은 주어진 행렬에 대한 행벡터들의 모든 선형결합의 집합이다.
- 좌 영공간은 전치행렬의 영공간이다.
- 기저는 벡터공간을 생성(span)하는 선형독립인 벡터의 집합이다.
- 차원은 벡터공간의 기저를 구성하는 벡터의 개수이다.
- 계수(rank)는 행렬의 열공간의 차원이다.
- 좌표계는 기저를 사용하여 벡터를 단일하게(unique) 나타내기 위해 수를 사용하는 시스템이다.

영공간(null space)와 행공간(row space)의 관계

❖ $Nul\ A \in \mathcal{R}^n$ $\quad\quad A \in \mathcal{R}^{m\times n}$

$Row\ A \in \mathcal{R}^n$

- $\mathbf{u} \in Nul\ A$ 라고 가정
- $Row\ A = Col\ A^\top$ $\quad\quad A^\top = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2 \cdots\ \mathbf{w}_m]$
- $\mathbf{v} \in Col\ A^\top$
- $\mathbf{v} = a_1\mathbf{w}_1 + a_2\mathbf{w}_2 + \cdots + a_m\mathbf{w}_m$

$$\mathbf{v} = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \cdots \mathbf{w}_m] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = A^\top \mathbf{a}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^\top \mathbf{v} = \mathbf{u}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{a} = (\mathbf{A}\mathbf{u})^\top \mathbf{a} = \mathbf{0}^\top \mathbf{a} = 0$$

$$Row\ A \perp Nul\ A$$