# LU 행렬분해

## LU Decomposition

Keon M. Lee

- 행렬의 분해
- LU 분해
- LU 분해 알고리즘

# 행렬의 분해

- 행렬 A의 분해 (factorization, decomposition)
  - A를 2개 이상의 행렬의 곱으로 나타내는 것  A= BC, A = BCD

- LU 분해
- Eigen 분해
- QR 분해
- SVD 분해

A. M. Turing
(1912-1954)

# LU 분해

❖ LU 분해 (LU factorization, LU decomposition)

- 행렬을 하 삼각행렬(lower triangular matrix) L과 상 삼각행렬(upper triangular matrix) U의 곱으로 표현

A = LU

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}}_{U} \qquad A = \underbrace{\begin{bmatrix} \triangle & 0 & 0 & 0 \\ * & \triangle & 0 & 0 \\ * & * & \triangle & 0 \\ * & * & * & \triangle \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}}_{U}$$

단위 하 삼각행렬
(unit lower triangular matrix)

- 정방행렬(square matrix) 뿐만 아니라 일반 사각행렬에도 적용 가능

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

# LU 분해

❖ LU 분해의 예
- 3x3 행렬의 LU 분해

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & 1 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

# LU 분해 알고리즘

❖ LU 분해

- A = LU
- A는 행교환(row exchange) 없이 행 사다리꼴(row-echelon form)로 변환 가능해야 함
- 교체와 상수배 행 연산에 대응하는 기본 행렬은 하 삼각행렬이고, 이들의 역행렬과 이들의 곱도 하 삼각행렬임

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$E_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

# LU 분해 알고리즘

❖ LU 분해
- A = LU
- A는 행교환(row exchange) 없이 행 사다리꼴(row-echelon form)로 변환 가능해야 함
- 교체와 상수배 행 연산에 대응하는 기본 행렬은 하 삼각행렬이고, 이들의 역행렬과 이들의 곱도 하 삼각행렬임

$$E_p \cdots E_1 A = U$$

$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} U = LU$$

$$L = E_1^{-1} \cdots E_p^{-1} I$$

# LU 분해 알고리즘

❖ A = LU

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11}$$

$$u_{12} = a_{12}$$

$$u_{13} = a_{13}$$

$$l_{21}u_{11} = a_{21} \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} \qquad u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$$

$$l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} \qquad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}$$

$$l_{31}u_{11} = a_{31} \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \qquad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33}$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

# LU 분해 알고리즘

❖ A = LU

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11}$$

$$u_{12} = a_{12}$$

$$u_{13} = a_{13}$$

$$l_{21}u_{11} = a_{21} \qquad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$

$$l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} \qquad u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$$

$$l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} \qquad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}$$

$$l_{31}u_{11} = a_{31} \qquad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \qquad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33}$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$$

$$\boxed{l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{p=1}^{j-1} l_{ip}u_{pj}}{u_{jj}}, \text{where } i > j}$$

$$\boxed{u_{ij} = a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}u_{pj}, \text{where } i \le j}$$

# LU 분해 알고리즘

❖ LU 분해 알고리즘 (Doolittle's LU Decomposition)

- $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij})_{nxn}$ 행렬

```
for i=1,⋯,n
    for j=1,⋯,i-1
        α = a_ij
        for p=1,⋯,j-1
            α = α-a_ip a_pj
        a_ij = αa_jj
    for j=i,⋯,n
        α = a_ij
        for p=1,⋯,i-1
            α = α-a_ip a_pj
        a_ij=α
```

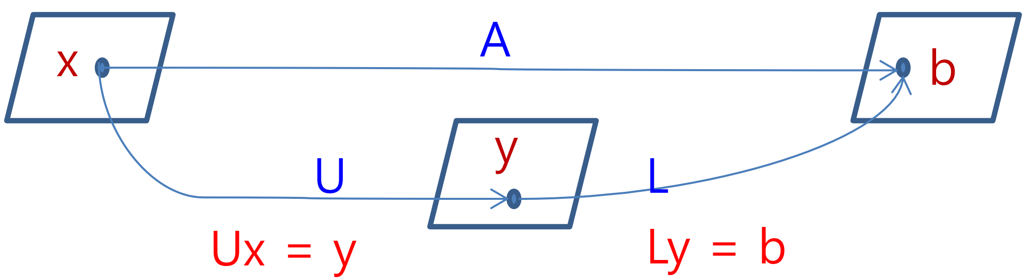
$$\boxed{l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{p=1}^{j-1} l_{ip} u_{pj}}{u_{jj}}, \text{where } i > j}$$

$$\boxed{u_{ij} = a_{ij} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip} u_{pj}, \text{where } i \leq j}$$

# LU 분해의 활용

❖ 선형시스템 해법 – factor-solve 접근법

- Ax = b,  A = LU
- Ax = (LU)x = b
- L(Ux) = b  Ly = b
- Ux = y



# LU 분해의 활용

❖ LU 분해을 이용한 선형시스템의 해법

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

**L(Ux) = b**

**Ly = b**

$$[L \quad \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & 1 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [I \quad \mathbf{y}]$$

**Ux = y**

$$[U \quad \mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

# LU 분해의 활용

❖ LU 분해를 이용한 역행렬 계산

- AB = I
- A= LU,  B = [$b_1$ $b_2$ … $b_n$]

- B의 첫번째 열

$$Ab_1 = A\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

B의 두번째 열

$$Ab_2 = A\begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- B의 마지막 열

$$Ab_n = A\begin{bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

# LU 분해의 활용

❖ LU 분해를 이용한 역행렬 계산

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.04762 \\ -0.9524 \\ 4.571 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.08333 \\ 1.417 \\ -5.000 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} b_{13} \\ b_{23} \\ b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.03571 \\ -0.4643 \\ 1.429 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.04762 & -0.08333 & 0.03571 \\ -0.9524 & 1.417 & -0.4643 \\ 4.571 & -5.000 & 1.429 \end{bmatrix}$$

# LU 분해의 활용

- ❖ LU 분해를 이용한 행렬식(determinant)의 계산
  - 정방행렬 A = LU에 대해서
  - det(A) = det(L)det(U)
  - 삼각행렬에서 det는 대각선 원소의 곱

$$A = \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 64 & 8 & 1 \\ 144 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.56 & 1 & 0 \\ 5.76 & 3.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 5 & 1 \\ 0 & -4.8 & -1.56 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

det(A) = -84

det(LU) = det(A)det(B) = -84

# LU 분해 적용 알고리즘의 효율성

❖ 선형시스템의 해법

- Gauss 소거법 $T\left(\frac{8n^3}{3}+12n^2+\frac{4n}{3}\right)$
- LU 분해활용 기법 $T\left(\frac{8n^3}{3}+12n^2+\frac{4n}{3}\right)$

❖ 역행렬 계산

- Gauss 소거법 $T\left(\frac{8n^4}{3}+12n^3+\frac{4n^2}{3}\right)$
- LU 분해활용 기법 $T\left(\frac{32n^3}{3}+12n^2+\frac{20n}{3}\right)$

| $n$ (크기) | 10 | 100 | 1000 | 10000 |
|---|---|---|---|---|
| **Gauss 소거법활용/ LU 분해 활용** | 3.28 | 25.83 | 250.8 | 2501 |

자료출처: http://numericalmethods.eng.usf.edu

# LU 분해 불가 행렬

❖ LU 분해 불가능한 행렬

- 모든 행렬이 LU 분해 가능한 것은 아님

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{22} & u_{23} \\ 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{22} = 0,\ u_{23} = 2,\ l_{32} \cdot 0 = 1\ ?$$

# LU 분해 불가 행렬

❖ 행 피봇팅(row pivoting)을 이용한 LU 분해

- 행 교환을 통한 행렬 재조정
- 미리 행교환을 한 다음, LU 분해 적용

A = PLU

- 행교환은 순열행렬(permutation matrix) P를 사용하여 가능

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 2 & 9 & 0 \\ 6 & 8 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 15/19 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 0 & 19/3 & -8/3 \\ 0 & 0 & 135/19 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -19/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$$

- 여러가지 분해 가능

# LU 분해 알고리즘

- LU 분해 A = LU에서 L이나 U 가 단위 삼각행렬인 경우에는 LU 분해가 유일하게 결정됨

- LU 분해에서 L 또는 U가 단위 행렬이라는 제약 조건이 없으면, 여러 가지 LU가 분해가 가능함

- LU 분해는 nxn 행렬에 대해서 적용하는 것을 기본으로 하나, 사각(rectangular) 행렬과 특이(singular) 행렬에도 적용가능함

# LU 분해 알고리즘

❖ MatLab/Octave에서 LU 분해

```
A = rand(3)
[L, U, P] = lu(A)   % L*U = P*A
b = rand(3,1)
bp = P*b
y = L\bp       % y = L^-1 b    Ly = b
x = U\y        % x = U^-1 y    Ux = y
```

```
octave:23> A = rand(3)
A =

  0.316537   0.968183   0.840520
  0.395807   0.920064   0.487354
  0.083118   0.871115   0.186470
```

```
octave:24> [L, U, P] = lu(A)
L =

   1.00000   0.00000   0.00000
   0.21000   1.00000   0.00000
   0.79972   0.34280   1.00000

U =

   0.39581   0.92006   0.48735
   0.00000   0.67791   0.08413
   0.00000   0.00000   0.42193

P =

Permutation Matrix

   0   1   0
   0   0   1
   1   0   0
```

```
octave:43> b = rand(3,1)
b =

   0.53963
   0.68914
   0.10339

octave:44> bp = P*b
bp =

   0.68914
   0.10339
   0.53963
```

```
octave:45> y = L₩bp
y =

   0.6891449
  -0.0413302
   0.0026688

octave:46> x = U₩y
x =

   1.8768686
  -0.0617525
   0.0063251

octave:47> A*x
ans =

   0.53963
   0.68914
   0.10339
```

# Summary

❖ 행렬 분해는 하나의 행렬을 두 개 이상의 행렬의 곱으로 나타내는 것이다.

❖ LU 분해는 하나의 행렬을 하 삼각행렬과 상 삼각행렬의 곱으로 나타내는 것이다.

❖ LU 분해가 되지 않은 경우, 행교환을 한 다음에 LU 분해를 하기도 한다.

❖ LU 분해는 선형시스템의 해법, 역행렬 계산, 행렬식(determinant) 등의 계산을 효과적으로 할 수 있게 한다.