대각화와 고유값 분해

Diagonalization and Eigendecomposition

Keon M. Lee

- 대각화
- 대각화 가능 행렬
- 고유값 분해(eigendecomposition)
- 대칭행렬
- 대칭행렬의 고유값
- 대칭행렬의 고유값 분해

대각화 (Diagonalization)

❖ **대각화가능 행렬**(diagonalizable matrix)

- nxn 행렬 A를 어떤 nxn 행렬 S을 통해 **$S^{-1}AS$**가 대각행렬이 될 수 있으면, A는 "대각화가능(diagonalizable)하다"
- "S는 A를 대각화한다"

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1.$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

고유값 분해 (Eigendecomposition)

❖ **고유값 분해 (Eigendecomposition, Spectral decomposition)**

- nxn 행렬 A를 eigenvector로 구성된 행렬 S와 eigenvalue의 대각행렬 Λ를 사용하여 $S\Lambda S^{-1}$로 분해하는 것

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

$$S = [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_1$$
$$A\mathbf{v}_2 = \lambda_2 \mathbf{v}_2$$
$$\vdots$$
$$A\mathbf{v}_n = \lambda_n \mathbf{v}_n$$

$$AS = A[\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n] = [A\mathbf{v}_1 \ \cdots \ A\mathbf{v}_n] = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{v}_n]$$

$$= [\mathbf{v}_1 \ \cdots \ \mathbf{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = S\Lambda$$

$\{\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ 선형독립 가정

$$AS = S\Lambda \qquad S^{-1}AS = \Lambda \qquad A = S\Lambda S^{-1}$$

대각화 가능(diagonalizable) 행렬만 고유값 분해 가능

거듭제곱 행렬의 eigenvalue

❖ 거듭제곱 행렬 A^k의 eigenvalue는 $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$

$$\begin{aligned} \textit{Proof.}\ & A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}. \\ & A^2\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x} \\ & \qquad\quad \vdots \\ & A^k\mathbf{x} = A(A^{k-1}\mathbf{x}) = A(\lambda^{k-1}\mathbf{x}) = \lambda^k\mathbf{x} \end{aligned}$$

Another proof.

$$AS = S\Lambda,\ \Lambda = S^{-1}AS$$

$$\Lambda^k = (S^{-1}AS)\cdots(S^{-1}AS) = S^{-1}A^kS$$

고유값 분해 과정

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 행렬 A의 eigenvalue 찾기

$$0 = det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

$$\lambda = 1, -2$$

2. 선형 독립인 eigenvector 구하기

$$\lambda = 1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \lambda = -2 \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. 행렬 S 구성

$$S = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \cdots \mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. 대각행렬 Λ구성

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = S \Lambda S^{-1}$$

고유값 분해

```
A =

     1     3     3
    -3    -5    -3
     3     3     1
```

```
>> [V L] = eig(A)

V =

    0.5774   -0.0000   -0.6727
   -0.5774   -0.7071    0.7371
    0.5774    0.7071   -0.0645


L =

    1.0000         0         0
         0   -2.0000         0
         0         0   -2.0000
```

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
>> AR = V*L*inv(V)

AR =

    1.0000    3.0000    3.0000
   -3.0000   -5.0000   -3.0000
    3.0000    3.0000    1.0000
```

$$A = S\Lambda S^{-1}$$

대각화 가능 행렬

❖ nxn 행렬 A의 **서로 다른 eigenvalue**를 가지면, **선형독립인** n개의 **eigenvector**를 갖게 되어, 대각화 가능 행렬이다.

❖ eigenvalue에 대한 **eigenspace의 차원**은 중복도(multiplicity)와 같거나 작다.

❖ eigenvalue에 대한 **eigenspace들의 차원의 합**이 n이 되면, 대각화 가능하다.

행렬곱의 eigenvalue

❖ **AB**와 **BA**는 0이 아닌 같은 eigenvalue를 갖는다.

$$AB\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \qquad \mathbf{x} \neq 0, \text{ and } \lambda \neq 0.$$

$$\mathrm{BA}(\mathrm{B}\mathbf{x}) = \lambda(B\mathbf{x}), and \ \ \mathrm{B}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

$$If \ \ \mathrm{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}, then \ \mathrm{AB}\mathbf{x} = \mathrm{A}\mathbf{0} = \mathbf{0} = 0\ \mathbf{x}, \ \text{which contradicts } \lambda \neq 0.$$

$$\therefore \lambda \text{ is an eigenvalue of } BA.$$

대칭 행렬

❖ 대칭행렬 (symmetric matrix)

- 정사각형 행렬(square matrix)이면서 $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$를 만족하는 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **대칭행렬의 예**
  - 그래프 표현 : 인접행렬(adjacency matrix)
  - 거리 행렬(distance matrix)
  - 이차형식(quadratic form)의 행렬
  - 공분산 행렬 (covariance matrix)
  - Gram 행렬 : AA^T, A^TA

대칭 행렬

❖ 대칭행렬의 예

- **공분산 행렬**(Covariance matrix)

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_5 = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}_6 = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 + \mathbf{x}_6}{6} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 18 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{m}$$

$$X = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 & \bar{\mathbf{x}}_2 & \bar{\mathbf{x}}_3 & \bar{\mathbf{x}}_4 & \bar{\mathbf{x}}_5 & \bar{\mathbf{x}}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{1}{6} X X^\top = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -4 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 22 & 32 \\ 32 & 64 \end{bmatrix}$$

대칭행렬의 고유벡터 직교성

❖ 대칭행렬의 **서로 다른 eigenvalue**에 대응하는 **eigenvector**들은 서로 **직교(orthogonal)** 한다

- eigenvalue $\Rightarrow$ eigenvector

$$\lambda_1 \Rightarrow \mathbf{v}_1 \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

$$\lambda_2 \Rightarrow \mathbf{v}_2$$

- $A = A^\top$

$$\mathbf{v}_1^\top A \mathbf{v}_2 = \langle \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda_2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$$

$$\mathbf{v}_1^\top A \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^\top A^\top \mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^\top \mathbf{v}_2 = \langle A\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \lambda_1 \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$$

$$\therefore \lambda_2 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \lambda_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$$

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0 \qquad \because \lambda_1 \neq \lambda_2$$

대칭 행렬의 고유값 분해

❖ $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

eigenvalues → eigenvectors

$$0 = -\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144 = -(\lambda - 8)(\lambda - 6)(\lambda - 3)$$

$$\lambda = 8: \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 6: \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = 3: \ \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

orthogonal

$$AP = PD$$

$$A = PDP^{-1}$$

$$A = PDP^{\top}$$

직교 대각화 가능 행렬

- ❖ **직교 대각화 가능 행렬** (orthogonally diagonalizable matrix)
  - 정사각형 행렬 $\mathbf{A}$에 대해서 **직교행렬(orthogonal matrix) P**와 **대각행렬 D**가 존재해서 $\mathbf{A = PDP^T = PDP^{-1}}$ 를 만족시키는 행렬

$$\mathbf{AP = PD,\quad P^TAP = D}$$

$$\mathbf{P^TP = I,\quad P^T = P^{-1},\quad PP^T = I}$$

- ❖ **직교 대각화 가능 행렬은 대칭(symmetric) 행렬이다.**

$$\mathbf{A^T = (PDP^T)^T = P^{TT}D^TP^T = PDP^T = A}$$

- ❖ **모든 대칭 행렬은 직교대각화 가능하다.**
  - 대칭 행렬 ⇔ 직교 대각화 가능
  - 즉, 대칭행렬이기만 하면 직교 대각화가 가능하다. $\mathbf{A = PDP^T}$

대칭행렬의 고유값분해

```
A =

     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

```
A =

     1     1     1
     1     1     1
     1     1     1
```

```
>> [V L] = eig(A)

V =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1


L =

     0     0     0
     0     0     0
     0     0     0
```

```
>> [V L] = eig(A)

V =

    0.4082    0.7071    0.5774
    0.4082   -0.7071    0.5774
   -0.8165         0    0.5774


L =

   -0.0000         0         0
         0         0         0
         0         0    3.0000
```

대칭행렬의 고유값 분해

❖ $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Eigenvalues → eigenvectors

$$0 = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$$

$$\lambda = 7: \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \lambda = -2: \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

동일한 eigenvalue에 대한 eigenvector들에 대해 Gram-Schmidt 과정 적용

$$\mathbf{z}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-1/2}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|2\mathbf{v}_3\|}2\mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

$$p = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 0 & 4/\sqrt{18} & -1/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A = PDP^{-1} \qquad A = PDP^{\top}$$

행렬의 스펙트럼(spectrum)

❖ **행렬 A의 스펙트럼(spectrum)**

- 행렬 A의 eiegenvalue(고유값)들의 집합

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \{7, -2\}$$

$$0 = -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda - 98 = -(\lambda - 7)^2(\lambda + 2)$$

❖ 대칭행렬 A $\in$ $R^{n\times n}$에 대한 **스펙트럼 정리** (spectrum theorem)

- A는 중복된 것까지 포함하여 n개의 실수 eigenvalue를 가진다.
- 각 eigenvalue λ에 대한 eigenspace의 차원은 characteristic equation의 해로서 λ의 중복도와 같다.
- 서로 다른 eigenvalue에 대응하는 eigenvector는 직교한다는 의미에서 각 고유공간은 서로 직교한다.
- A가 직교 대각화 가능하다.

스펙트럼 분해

❖ **대칭행렬**의 **고유값 분해**에 대한 **열-행 전개**(column-row expansion) 표현

- A를 스펙트럼(spectrum)에 의하여 결정된 조각으로 분해

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$$
$$A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$$
$$\vdots$$
$$A\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n$$

$$P = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

$$AP = A\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\mathbf{v}_1 & \cdots & A\mathbf{v}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{v}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix} = PD$$

$$A = PDP^{-1} = PDP^\top = \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^\top\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{v}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^\top\end{bmatrix}$$

$$A = \lambda_1\mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\top + \cdots + \lambda_n\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^\top$$

스펙트럼 분해

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$$A = 8\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^\top + 3\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^\top$$

$$\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/5 & 2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ -2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$8\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T + 3\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T = \begin{bmatrix} 32/5 & 16/5 \\ 16/5 & 8/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/5 & -6/5 \\ -6/5 & 12/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Summary

- **대각화 가능 행렬** A는 SAS^{-1}를 해서 대각행렬로 변환할 수 있는 행렬 S가 존재하는 것이다.
- **고유값 분해**(eigendecomposition, spectral decomposition)는 정방행렬 A를 eigenvector의 행렬 S와 eigenvalue의 대각행렬 Λ를 사용하여 $S\Lambda S^{-1}$로 분해하는 것이다.
- **대각화 가능 행렬**은 **고유값 분해**를 할 수 있다.
- **대칭행렬**은 전치행렬과 원래 행렬이 같은 것이다.
- 대칭행렬의 **서로 다른 eigenvalue**에 대응하는 **eigenvector**들은 서로 **직교**(orthogonal) 한다.
- **직교 대각화 가능 행렬**은 정방행렬 A에 대해서 **직교행렬 P**와 **대각행렬 D**가 존재해서 $A = PDP^T = PDP^{-1}$ 를 만족하는 것이다.
- 모든 **대칭 행렬은 직교대각화 가능**하다.
- 행렬 A의 **스펙트럼**은 행렬 A의 eiegenvalue들의 집합이다.
- 대칭행렬의 **고유값 분해**는 스펙트럼 값을 **스칼라배한 eigenvector의 열-행 전개**한 것의 합으로 표현할 수 있다.