고유값과 고유벡터
Eigenvalues and Eigenvectors

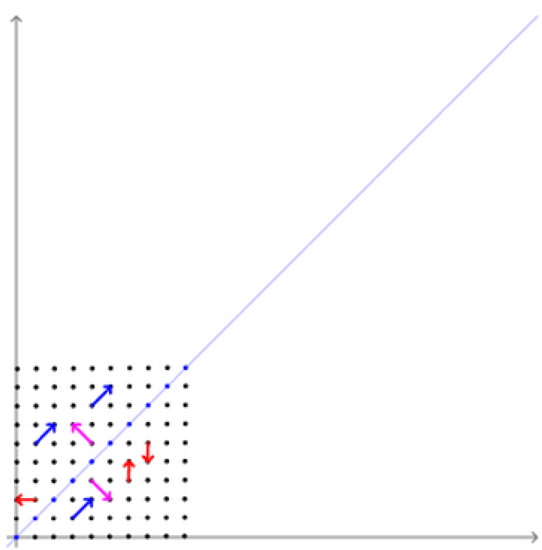
Keon M. Lee

- ❖ 고유벡터(eigenvector)
- ❖ 고유값(eigenvalue)
- ❖ 고유값 계산 방법
- ❖ 고유공간(eigenspace)
- ❖ 닮음 행렬(similar matrix)
- ❖ 고유벡터의 성질
- ❖ 고유벡터의 응용 분야

Eigenvalue와 Eigenvector

❖ **Eigenvector** (고유벡터)

- nxn 행렬 A에 대해 **Ax = λx**를 만족하는 영벡터(0)가 아닌 벡터
  - 스칼라 λ : eigenvalue (고유값)
  - eigen- : 독일어 (self, unique to, peculiar to, belonging to)



$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

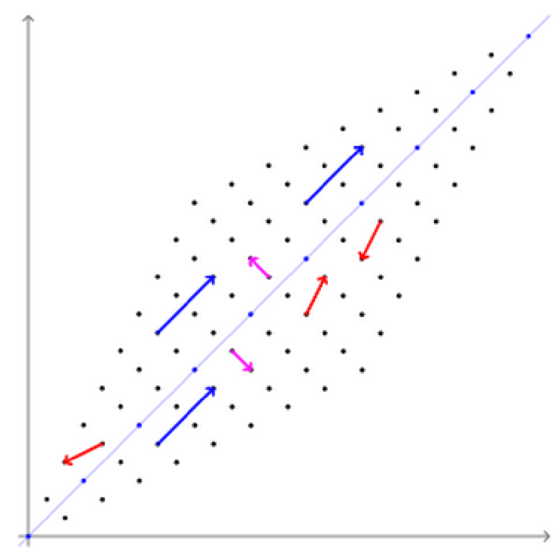
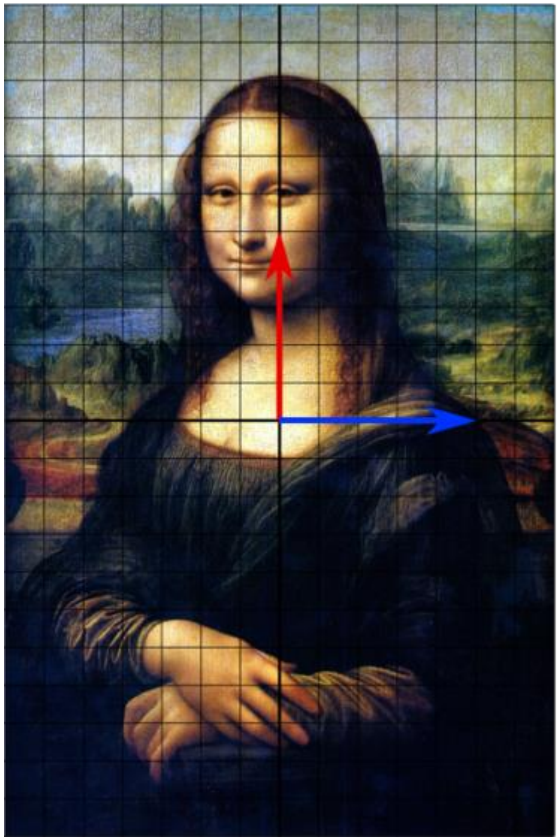


Image : http://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors

Eigenvalue와 Eigenvector



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0.12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

http://en.wikipedia.org/wiki/Eigenvalues_and_eigenvectors

Eigenvector의 확장 개념

❖ 행렬 대신 다른 객체에 적용
- **Eigenfunction**
- **Eigenface**
- Eigenmode
- Eigenstate

$$\mathcal{A}f = \lambda f \qquad \mathcal{A} = \frac{d}{dx}$$

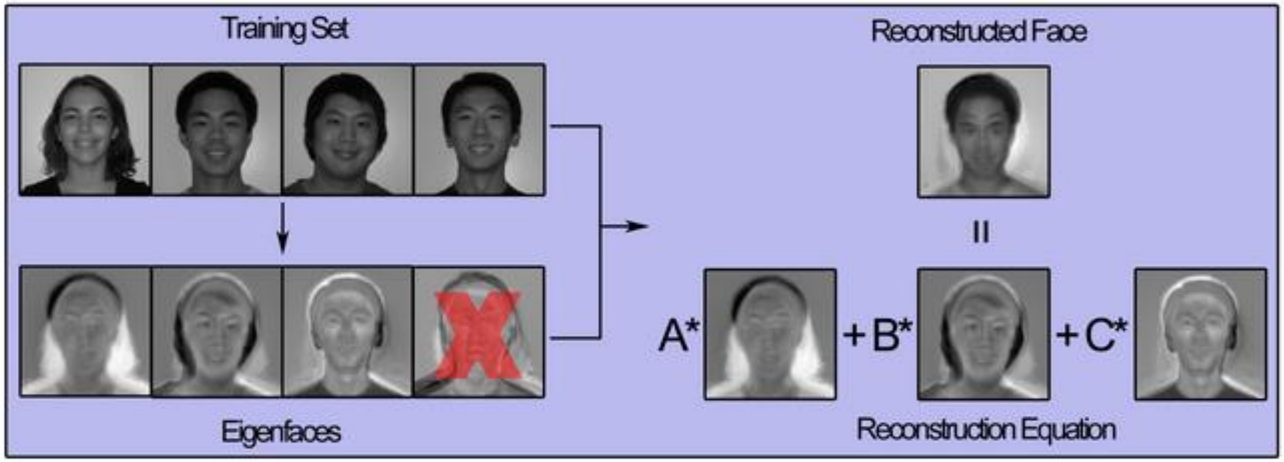
$$\frac{d}{dx}f(x) = \lambda f(x)$$

$$f(x) = e^{ax}$$

$$\lambda = a$$

Eigenvector의 확장 개념

❖ Eigenface



Source: http://cnx.org/content/m33183/latest/

정방행렬의 거듭제곱

❖ $\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ **인 경우 (x**는 eigenvector, λ는 eigenvalue)

$$\mathcal{A}^{100}\mathbf{x} = \lambda^{100}\mathbf{x}$$

$$\mathcal{A}^{2}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda^{2}\mathbf{x}$$

$$\mathcal{A}^{3}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathcal{A}\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathcal{A}\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathcal{A}\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda^{2}\mathcal{A}\mathbf{x} = \lambda^{3}\mathbf{x}$$

Eigenvector ?

❖ $\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{A}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Eigenvalue를 알 때 Eigenvector 찾기

❖ $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$$A\mathbf{x} = 7\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} - 7\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(A - 7I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}$ should not be $\mathbf{0}$.

$$det(A - 7I) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Eigenvalue와 eigenvector 찾기

❖ $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

$$A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$det(A - \lambda I) = 0$$

A의 특성방정식
(characteristic equation)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)(-6-\lambda) - 9$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda - 21 = (\lambda - 3)(\lambda + 7) = 0$$

$$\lambda = 3, -7$$

nxn 행렬의 특성방정식

- **nxn 행렬의 특성방정식**(characteristic equation)

$$det(\mathcal{A} - \lambda I) = 0$$

  - n차 다항식
  - 중복도(multiplicity, 같은 eigenvalue가 나타나는 회수)와 복소수(complex number) 근(root)까지 고려하면 n개의 근이 존재

- **Eigenvalue 계산**
  - 2x2 행렬, 삼각행렬 등 특별한 경우에는 특성방정식 이용
  - 일반적으로 수치해석적 방법 사용

Eigenspace

- $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

  $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$

  - Eigenvector는 A – λI의 영공간(nullspace)에 해당

- **λ에 대응하는 A의 고유공간** (Eigenspace of A corresponding to λ)
  - λ에 대응하는 모든 eigenvector로 생성되는 영 벡터(zero vector)를 포함하는 부분공간

Eigenspace

❖ $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ $\lambda = 2$

$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ $A\mathbf{x} = 2\mathbf{x}$

$(A - 2I)\mathbf{x} = 0$

$$(A - 2I) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
>> A= [4 -1 6; 2 1 6; 2 -1 8]

A =

     4    -1     6
     2     1     6
     2    -1     8

>> B = A - 2*eye(3)

B =

     2    -1     6
     2    -1     6
     2    -1     6

>> C = rref(B)

C =

    1.0000   -0.5000    3.0000
         0         0         0
         0         0         0
```

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Eigenspace of A corresponding to λ=2

Eigenvector in Octave/MatLab

```
>>  A = [4 -1 6; 2 1 6;2 -1 8]

A =

     4    -1     6
     2     1     6
     2    -1     8

>> [V D] = eig(A)

V =

    0.5774   -0.2538    0.1377
    0.5774   -0.9643   -0.9685
    0.5774   -0.0761   -0.2073


D =

    9.0000         0         0
         0    2.0000         0
         0         0    2.0000
```

```
>> v1 = V(:,1)

v1 =

    0.5774
    0.5774
    0.5774

>>  A*v1

ans =

    5.1962
    5.1962
    5.1962

>> 9*v1

ans =

    5.1962
    5.1962
    5.1962
```

삼각행렬의 eigenvalue

❖ 삼각행렬의 eigenvalue는 주대각선 상의 수

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$det\ (A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) = 0$$

$$\lambda = a_{11}, a_{22}, a_{33}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \qquad \lambda =$$

Eigenvector의 선형독립

❖ $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$이 nxn 행렬 A의 서로 다른 r개의 eigenvalue $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$에 대한 eigenvector이면, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$은 선형독립

- 귀류법에 의한 증명(Proof by contradiction)
- 만약 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$이 선형의존(linearly dependent)이면, $\mathbf{v}_{p+1}$가 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$에 의해 선형결합으로 표현되는 가장 작은 p가 존재한다.

$$c_1\mathbf{v_1} + \cdots + c_p\mathbf{v_p} = \mathbf{v}_{p+1}$$

- 양변에 A 곱하기, $A\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k$

$$c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2 + \ldots + c_pA\mathbf{v}_p = A\mathbf{v}_{p+1}$$

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\lambda_p\mathbf{v}_p = \lambda_{p+1}\mathbf{v}_{p+1}$$

$$c_1\lambda_{p+1}\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_{p+1}\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\lambda_{p+1}\mathbf{v}_p = \lambda_{p+1}\mathbf{v}_{p+1}$$

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

- $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$가 선형독립이기 때문에, 위 식의 모든 계수는 0
- $\lambda_i - \lambda_{p+1} \neq 0$이므로, $c_i = 0$이 되고,
  처음 식에서 $\mathbf{v}_{p+1} = \mathbf{0}$가 되어 $\mathbf{v}_{p+1}$는 eigenvector가 아님.

∴ 이들 eigenvector는 선형독립

닮음행렬(similar matrix)

❖ 닮음행렬(similar matrix)

- nxn 행렬 A, B에 대하여, 가역행렬 P가 있어, 서로 변환될 수 있는 행렬
  $P^{-1}AP = B$
  $P^{-1}BP = A$ ($A = PBP^{-1}$)
- 닮음변환
  A를 **$P^{-1}AP$**로 변환하는 것

❖ 닮음행렬의 eigenvalue

- 두 행렬의 특성방정식이 같아서 동일한 eigenvalue를 가짐

In case of $B = P^{-1}AP$

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P$$
$$= P^{-1}(AP - \lambda P) = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

$$\begin{aligned} det(B - \lambda I) &= det(P^{-1}(A - \lambda I)P) \\ &= det(P^{-1})det(A - \lambda I)det(P) \\ &= det(A - \lambda I) \end{aligned}$$

Eigenvalue, determinant, trace

$$A\mathbf{x} = \lambda_i \mathbf{x}$$

eigenvalues

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = det(A)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = tr(A)$$

determinant

trace

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 3, -7$$

Eigenvalue, determinant, trace

❖ For $A \in \mathcal{R}^{2\times 2}$, $det(A-\lambda I) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A)$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad tr(A) = a + d, \qquad det(A) = ad - bc$$

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc \\ &= \lambda^2 - tr(A)\lambda + det(A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} det(A-\lambda I) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) \\ &= \lambda^2 - (\lambda_1+\lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2. \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = tr(A), \quad \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$$

Eigenvalue vs determinant

- $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = det(A)$

$$det(A - \lambda I) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = f_A(\lambda)$$

$$f_A(0) = det(A) = (-1)^n (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

$$\therefore det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

Eigenvalue vs trace

❖ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(A) = tr(A)$

- λ^{n-1}의 계수(coefficient) 비교

$$f_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

$$(-1)^n \sum_{i=1}^{n}(-1)\lambda_i = (-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = (-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}a_{ii}\lambda^{n-1}$$

$$(-1)^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-1}a_{ii}$$

$$\sum_{i=1}^{b}\lambda_i = tr(A)$$

역행렬의 eigenvalue

❖ A가 가역행렬(invertible)

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x}$$

$$A^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{x}/\lambda$$

- 역행렬 A^{-1}의 eigenvalue $1/\lambda$
- 역행렬 A^{-1}의 eigenvector $\mathbf{x}$

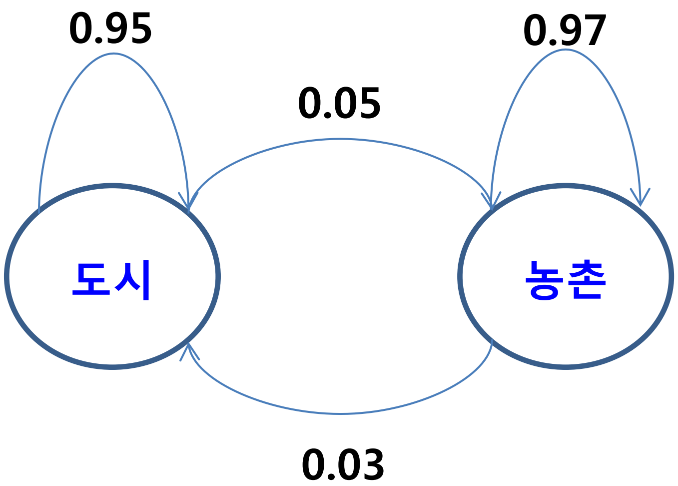
Markov Chain과 eigenvector

❖ Markov chain

- 상태 천이(transition)가 현재 상태에 따라 확률적으로 결정되는 시스템

$$A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix}$$

확률행렬, 천이행렬



$$\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \qquad \mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 \qquad \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.582 \\ 0.418 \end{bmatrix}$$

먼 미래의 도시와 농촌의 인구 비는?

Markov Chain과 eigenvector

$$A = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.03 \\ 0.05 & 0.97 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$$

$$det \begin{bmatrix} .95 - \lambda & .03 \\ 0.05 & .97 - \lambda \end{bmatrix} = (.95 - \lambda)(.97 - \lambda) - (.03)(0.05) = 0$$

$$\lambda^2 - 1.92\lambda + .92 = 0 \qquad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.92 \qquad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Let} \ \ \mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \qquad A\mathbf{v}_2 = (0.92)\mathbf{v}_2$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} & \mathbf{v_2} \end{bmatrix}^{-1} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .125 \\ .125 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = c_1 A\mathbf{v}_1 + c_2 A\mathbf{v}_2 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2(0.92)\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1 = c_1 A\mathbf{v}_1 + c_2(0.92)A\mathbf{v}_2 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2(0.92)^2\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{x}_k = c_1\mathbf{v}_1 + c_2(0.92)^k\mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{x}_k = 0.125 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + (0.225)(0.92)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{As } k \to \infty, (.92)^k \to 0.$$

Eigenvector 응용 분야

- **행렬 분해**
  - 고유값 분해 (Eigendecomposition, spectral decomposition)
  - 특이값 분해 (SVD, Singular Value Decomposition)
- **PCA** (Principal Component Analysis)
  - 좌표계 변환
  - 차원 축소
- **그래프 분석**
  - Spectral graph theory
  - 그래프 기반 군집화
  - 그래프 영향도 측정
    - Google PageRank
- **신호처리**
  - 영상처리 : Eigenface
  - 진동 분석
- **과학·공학 분석**
  - 양자역학 : Schrödinger 방정식
  - 응력분석

Summary

- **고유벡터(eigenvector)**는 정방행렬 A에 대해서 **Ax =λx**를 만족하는 벡터 x를 말하며, 이때 λ를 고유값(eigenvalue)이라고 한다.
- 행렬의 **특성방정식**(characteristic equation)은 **det(A - λI) = 0** 으로 정의되고, 이 방정식의 근이 eigenvalue이다.
- 특정 eigenvalue에 대한 **고유공간(Eigenspace)**은, 해당 eigenvector 들에 의해 생성되는 부분공간이다.
- **삼각행렬**의 eigenvalue는 주대각선 상의 숫자들이다.
- **서로 다른 eigenvalue**에 대한 **eigenvector**들은 서로 **선형독립**이다.
- 행렬 A을 어떤 가역행렬 P과 그 역행렬 P^{-1}을 사용하여 다른 행렬 B로 변환할 수 있으면, 두 행렬 A와 B는 서로 **닮음행렬**이다.
- **닮음행렬**은 동일한 eigenvalue를 갖는다.
- **행렬식**(determinant)은 eigenvalue들의 곱과 같고, **trace**는 eigenvalue의 합과 같다.
- **역행렬**의 eigenvalue는 원래 행렬의 eigenvalue의 역수이다.